Cours de mathématiques

CPIGN
2023

Vincent Giraud

Cette présentation est téléchargeable à l'adresse suivante :

`https://www.giraud.eu/contenus/cours-CPIGN.pdf`

1572
Algebra opera de Raphaël Bombelli. Maîtrise des nombres complexes.

1591
In artem analyticem isagoge de François Viète. Calcul littéral.

1669 - 1684
Principia Mathematica de Newton et travaux de Leibniz. Calcul infinitésimal.

1713
Ars Conjectandi de Jacques Bernoulli. Probabilités.

1829
Travaux d'Évariste Galois. Théorie des groupes.

Environ 820
Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison de Al-Khwârizmî. Algèbre.

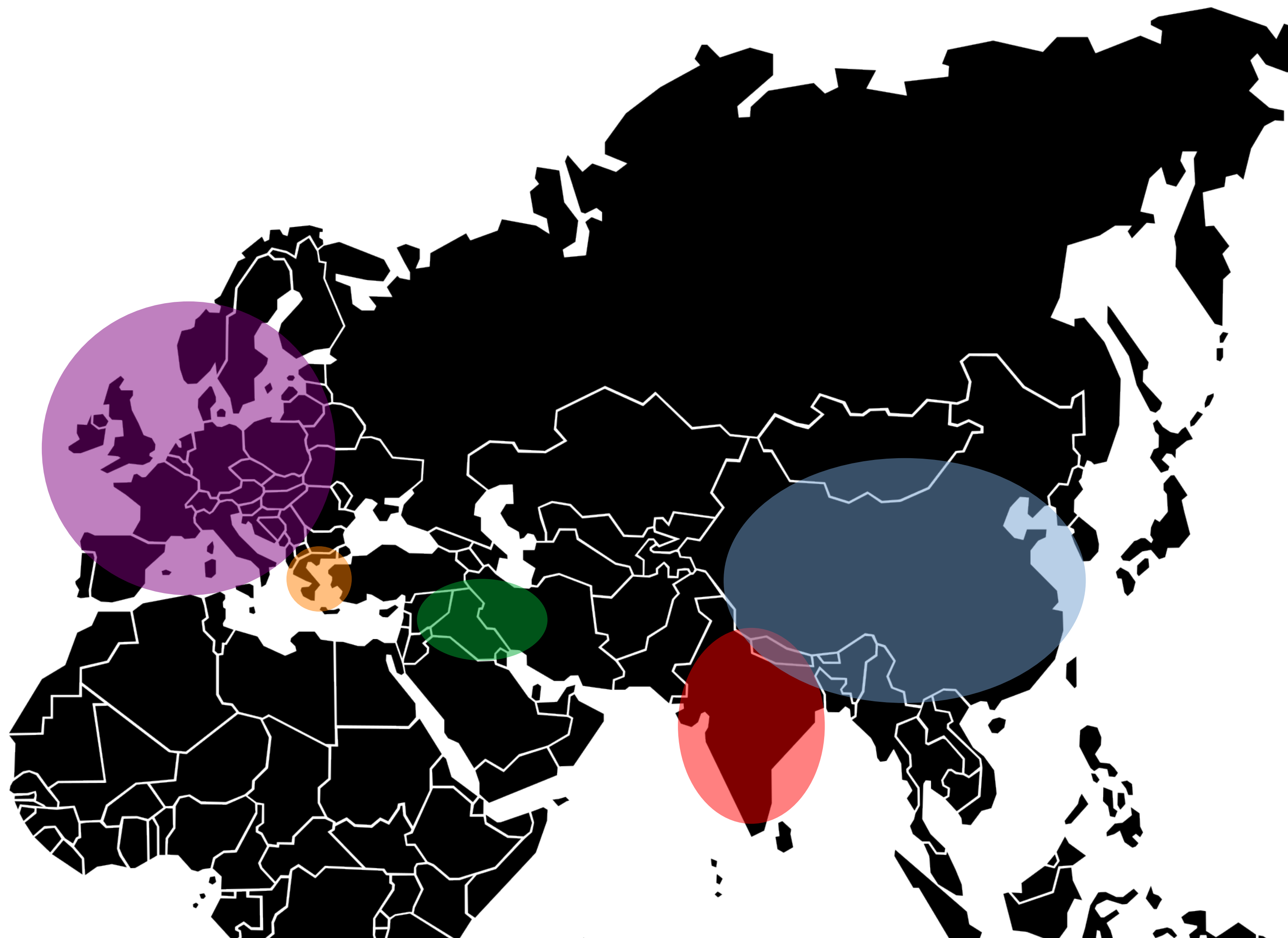
628
Brahmasphutasiddhanta de Brahmagupta. Maîtrise du zéro et des nombres négatifs.

0

2ème siècle av. J.-C.
Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique. Géométrie, proportions, nombres réels.

300 av. J.-C.
Éléments d'Euclide. Géométrie, théorie des nombres.

3ème millénaire av. J.-C.
Notation des nombres.



Calcul matriciel et systèmes linéaires

Calcul matriciel

En mathématiques, une matrice est un tableau d'éléments, carré ou non.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Une matrice avec une seule colonne ou ligne peut être apparentée à un vecteur.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 48 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 & 0 & 11 & 68 & -74 \end{bmatrix}$$

Calcul matriciel

On peut additionner des
matrices de même taille

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = ?$$

Calcul matriciel

On peut soustraire des matrices
de même taille

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = ?$$

Calcul matriciel

On peut multiplier des matrices à condition que le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 15 & 15 & 15 \\ 24 & 24 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad ?$$

$$\times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \end{bmatrix}$$

Calcul matriciel

La division entre matrices n'existe pas à proprement parler, en fait on multiplie avec l'inverse de l'opérande de droite

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1/5 & 0 & 1 \\ 1/5 & -2 & 0 \\ 1/5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 & -1 & -2 \\ 7/5 & -4 & -2 \\ 2 & -7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Calcul matriciel

La transposée d'une matrice s'obtient en inversant les lignes et les colonnes de celle-ci.

La transposée d'une matrice A se note A^T.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

On applique en quelque sorte une rotation autour de la diagonale principale de la matrice.

Systèmes linéaires

Une équation linéaire est une
équation avec une ou plusieurs
variables dont le degré ne
dépasse pas un.

$$2x+5=3$$

$$-\frac{1}{3}x=6$$

$$-4{,}5x+1{,}8=-1+5{,}2x$$

$$x \times \pi = 7$$

$$4x-3y+2z=-8$$

Systèmes linéaires

Quand on a plusieurs inconnues, on a besoin d'autant d'équations indépendantes pour les retrouver

$$\begin{cases} 4x+3y-8z=5 \\ 3x-3y+1z=-2 \\ 1x+2y+2z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x+2y-3z=5 \\ 2x+4y-6z=10 \\ 4x+8y-12z=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1w-2x+1{,}5y+9z=-2 \\ 4w+4x+2y-5z=7 \end{cases}$$

Systèmes linéaires

On peut assimiler un système
linéaire à une matrice

$$\begin{cases} 4x+3y-8z=5 \\ 3x-3y+1z=-2 \\ 1x+2y+2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 & -8 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Systèmes linéaires

On peut utiliser la méthode du
pivot de Gauss pour résoudre
un tel système

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -3 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{11}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{9}{4} \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{9}{4} \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -27 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ -27 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = -6 \\ z = 9 \end{cases}$$

Systèmes linéaires

Le pivot de Gauss s'utilise aussi pour inverser une matrice, si possible

$$\times \begin{bmatrix} -0,5 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Bigg| \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Bigg| \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Bigg| \left[\begin{array}{ccc} -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Bigg| \left[\begin{array}{ccc} -0,5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

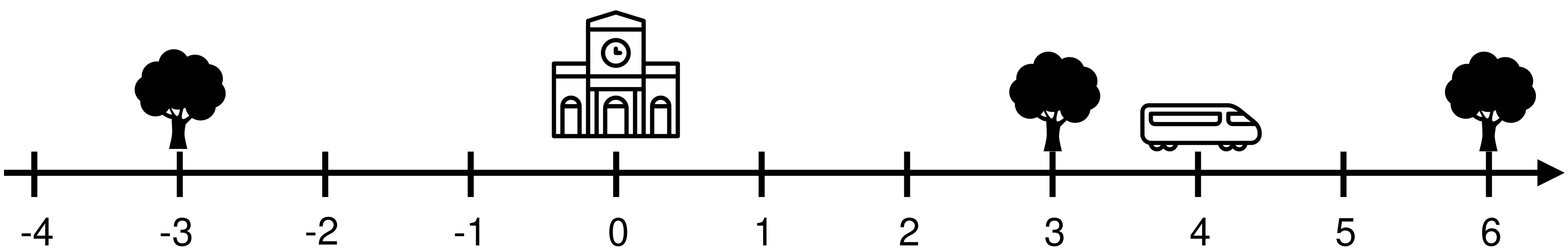
$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Bigg| \left[\begin{array}{ccc} -0,5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0,5 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Distance orientée

Dans certains exercices de calcul, il peut être utile d'introduire la notion de distance orientée

Par convention, on va alors attribuer un signe (+ ou -) à toute distance, en fonction de son sens

Ainsi par exemple, en additionnant deux distances de sens inversés, on va en obtenir une troisième quelque part entre les deux

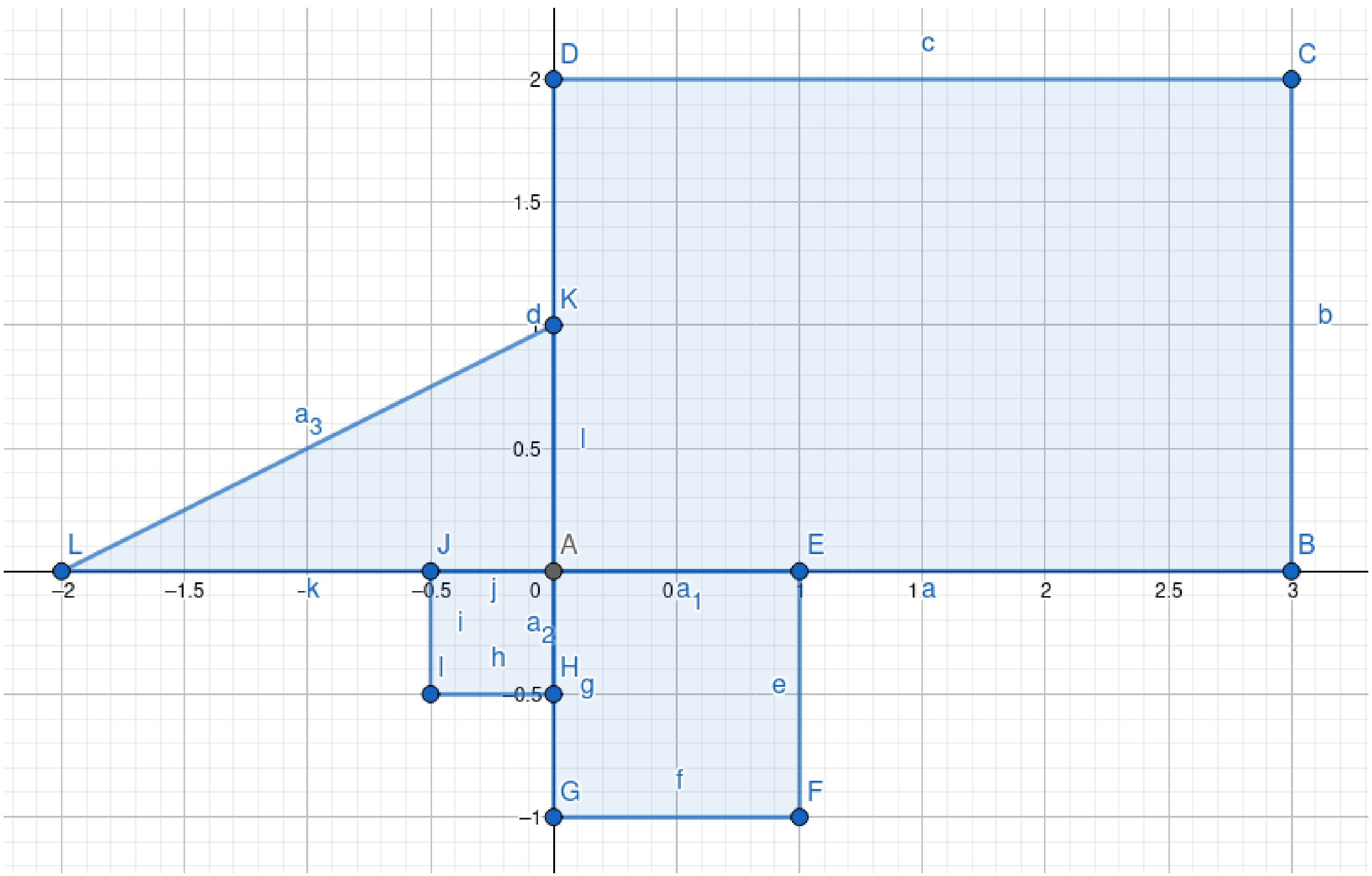


Aire orientée

On peut simplement prolonger ce principe sur le concept d'aire, en suivant les règles opératoires de la multiplication

Une aire avec deux côtés négatifs va alors être positive

Le principe peut aussi s'appliquer aux volumes

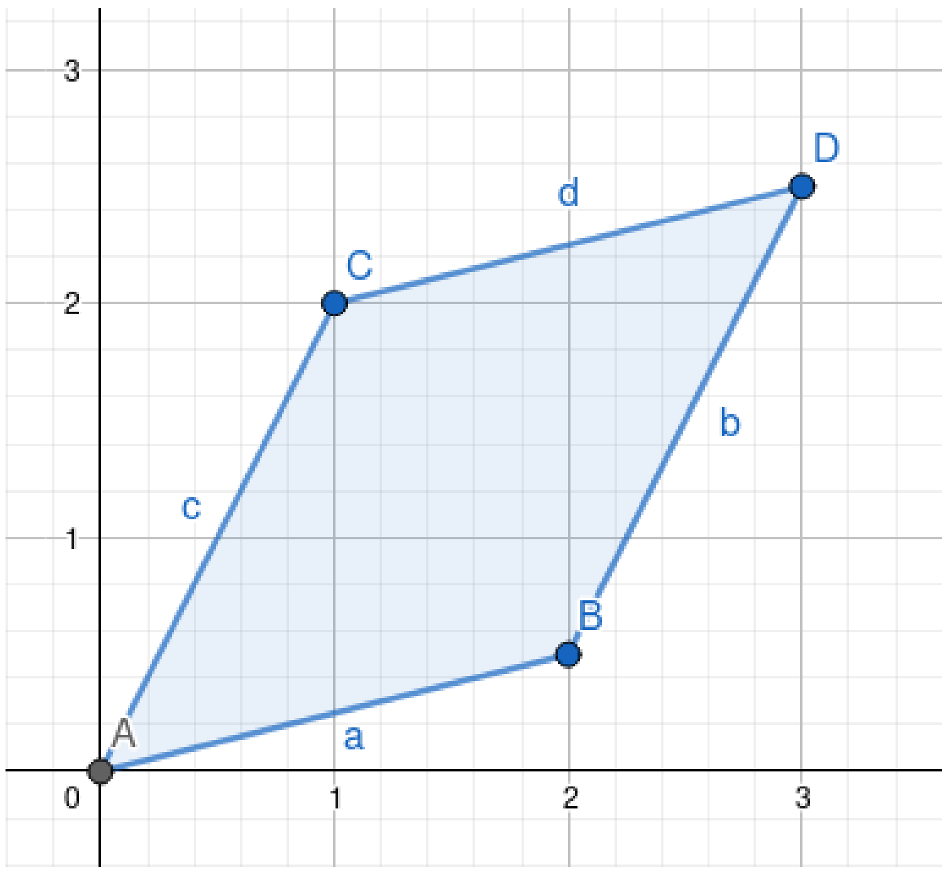


Déterminant

$$det(X, X') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

Le déterminant est une grandeur que l'on peut calculer à partir d'une matrice ou d'une application linéaire

La valeur absolue du déterminant de deux vecteurs en deux dimensions donne l'aire du parallélogramme formé par eux



$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 0{,}5 \times 1 = 3{,}5$$

Déterminant

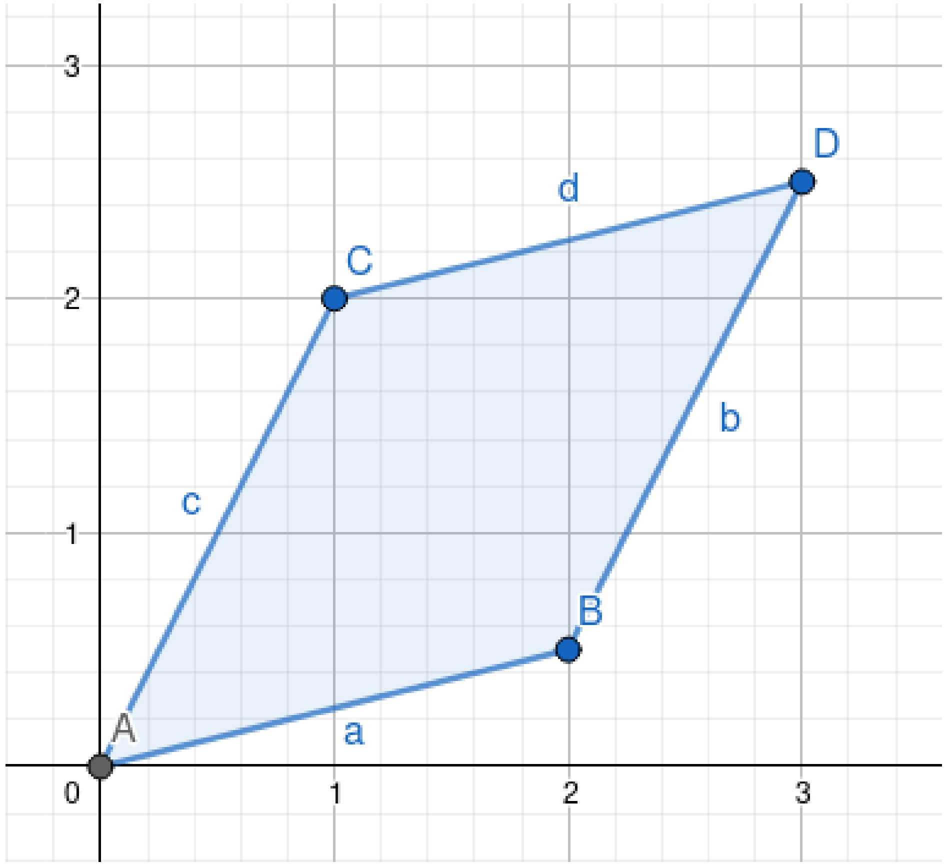
$$det(X, X') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

Propriétés notables :

- Si les vecteurs sont colinéaires, le déterminant est à zéro (aire nulle)

- Si on considère le signe du déterminant, on prend alors en compte l'orientation des vecteurs entre eux. Le déterminant entre x et x' n'est positif que si l'angle entre ces deux vecteurs est compris entre 0 et π

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 0{,}5 \times 1 = 3{,}5$$

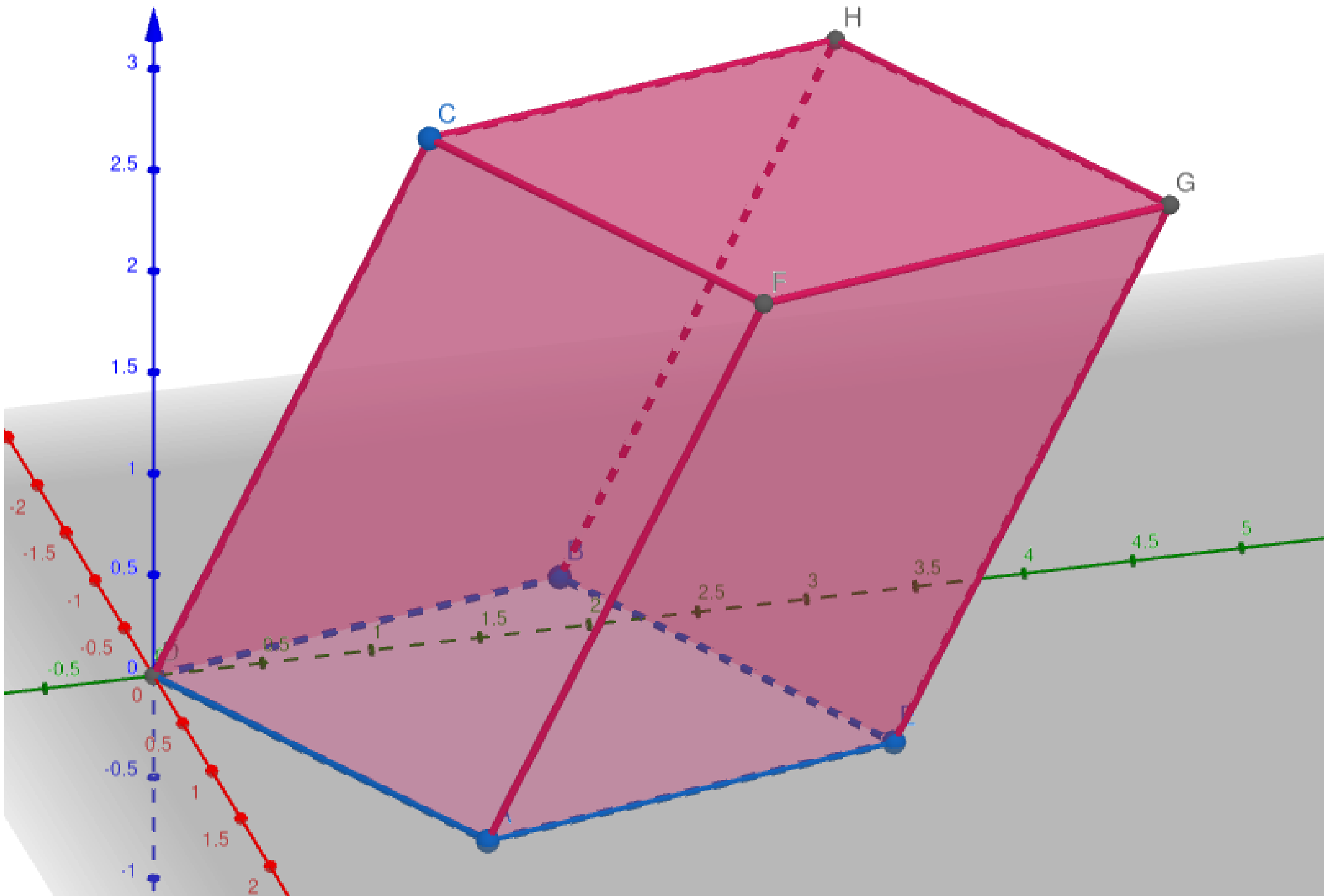


Déterminant

$$det(X, X', X'') = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \times \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \times \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \times \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

En trois dimensions, la valeur absolue donne le volume du parallélépipède associé aux trois vecteurs de la matrice

$$\begin{vmatrix} 2 & 0,5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 10,5$$



Déterminant

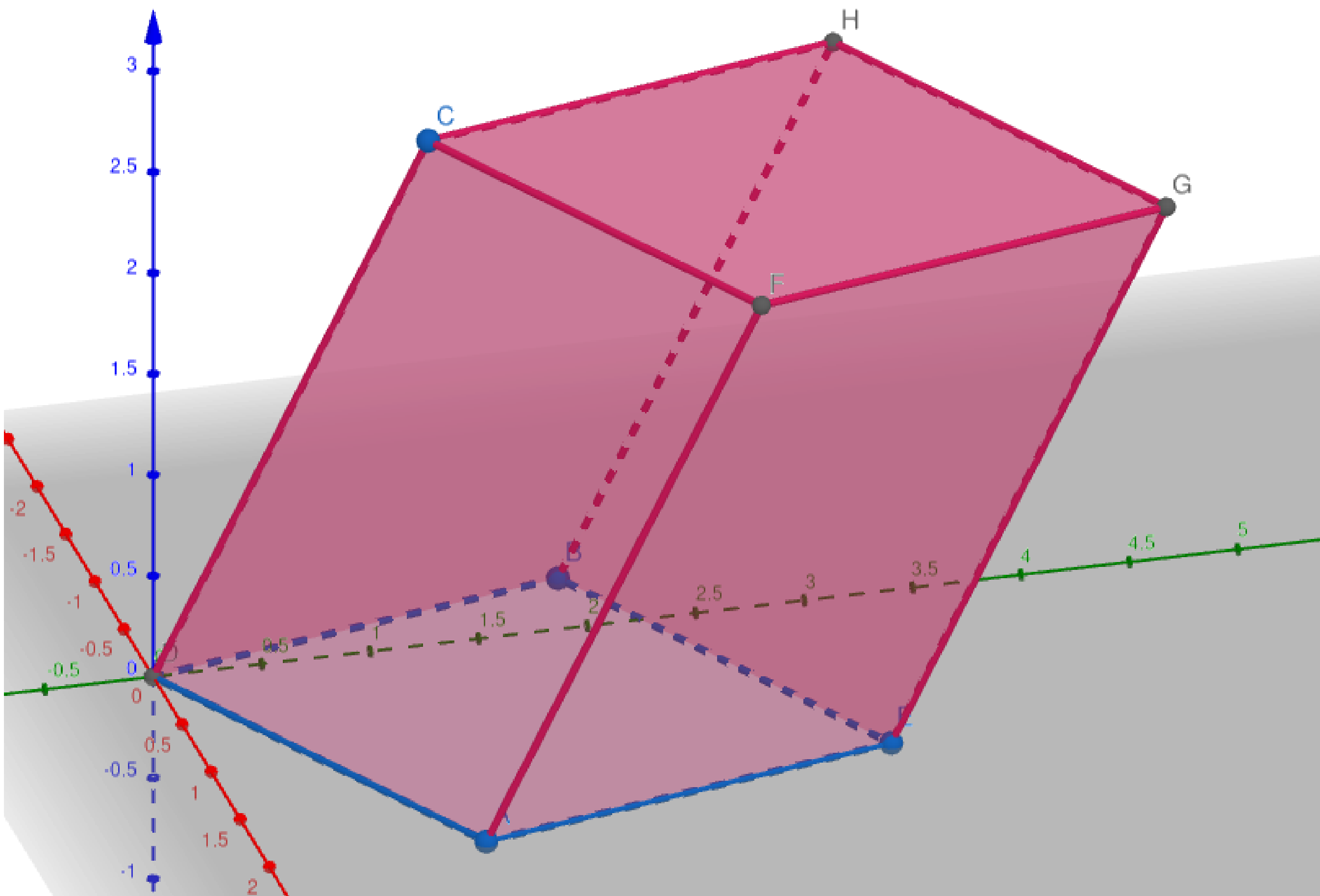
$$det(X, X', X'') = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \times \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \times \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \times \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

Propriétés notables :

- Si les vecteurs sont dans le même plan, le déterminant est à zéro (volume nul)

- On peut là aussi considérer le signe du déterminant : s'il est positif, c'est qu'on peut obtenir le parallélépipède en «étirant» un cube unité, sans avoir à appliquer d'effet miroir

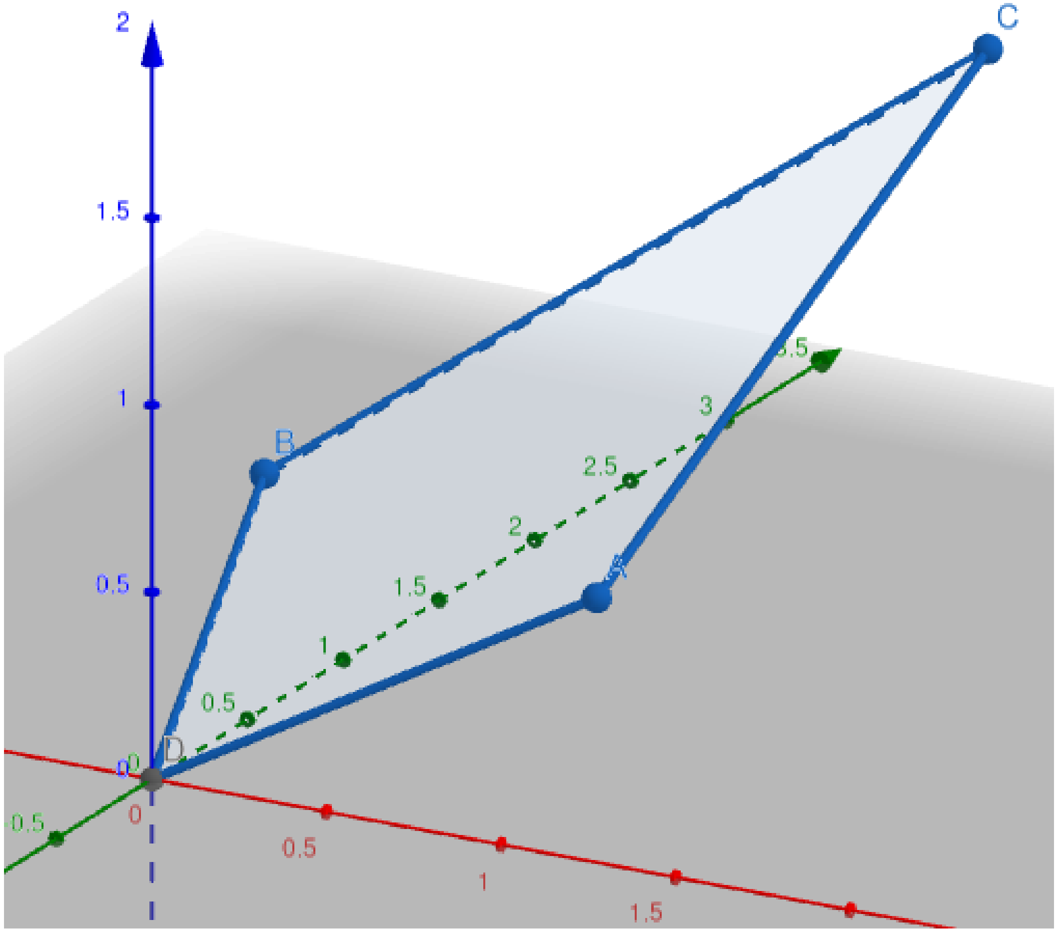
$$\begin{vmatrix} 2 & 0{,}5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 10{,}5$$



Déterminant

L'utilisation la plus courante du déterminant est celle qui permet de savoir si un système d'équation à une solution unique. S'il est différent de zéro, c'est le cas.
En effet, les dépendances entre les équations ne sont pas toujours évidentes.

$$\begin{vmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & 3 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 1{,}125 \end{vmatrix} ?$$



Par ailleurs, une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Déterminant

Quelques propriétés notables :

- Si une matrice a une colonne ou une ligne nulle, son déterminant est zéro
- Si une matrice a deux lignes ou deux colonnes proportionnelles, son déterminant est à zéro
- Une matrice et sa transposée ont le même déterminant
- Si l'on permute deux lignes ou deux colonnes dans une matrice, le signe du déterminant est changé
- Si on multiplie les éléments d'une ligne ou d'une colonne par un scalaire, le déterminant est lui aussi multiplié par lui
- Si à une ligne (respectivement : colonne), on ajoute le multiple d'une autre ligne (respectivement : colonne), le déterminant est inchangé
- $|AB| = |A||B| = |B||A|$
- Si une matrice est diagonale ou triangulaire, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux

Déterminant

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Comme la maîtrise du déterminant de dimension 3 nécessite celle de dimension 2, celle de dimension 4 utilise celle de dimension 3, et ainsi de suite...

Pour les calculs de déterminants de dimension supérieure à 3, on peut s'aider de la matrice des signes, qui peut s'étendre ou se tronquer où bon nous semble.

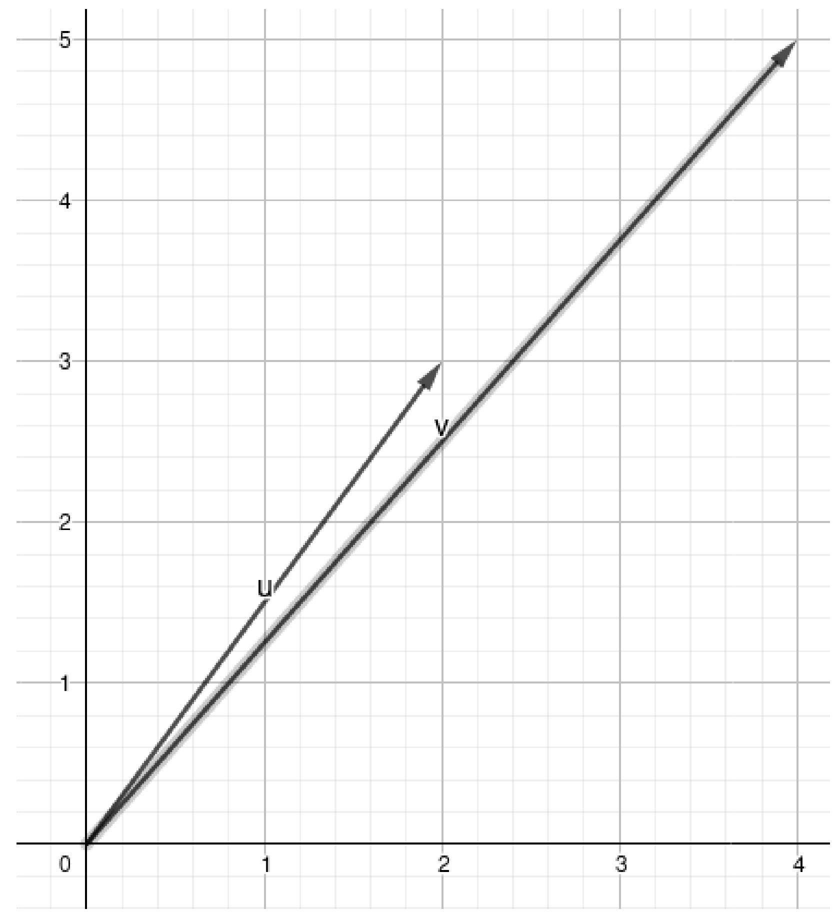
Ainsi, pour un déterminant de dimension 4, on fait :

$$det\left(X, X', X'', X'''\right) = \begin{vmatrix} w & w' & w'' & w''' \\ x & x' & x'' & x''' \\ y & y' & y'' & y''' \\ z & z' & z'' & z''' \end{vmatrix}$$

$$= w \times \begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix} - x \times \begin{vmatrix} w' & w'' & w''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix} + y \times \begin{vmatrix} w' & w'' & w''' \\ x' & x'' & x''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix} - z \times \begin{vmatrix} w' & w'' & w''' \\ x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \end{vmatrix}$$

Changement de base

En combinant le calcul matriciel et les systèmes linéaires, on peut exercer des changements de base



$$\vec{u} = (2,3)$$

$$\vec{v} = (4,5)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2,5 & 2 \\ 1,5 & -1 \end{bmatrix}$$

Vecteur dans la base $(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,5 & 2 \\ 1,5 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ Vecteur dans la base cartésienne

Polynômes

Polynômes

Une fonction polynomiale est
une fonction de la forme :

$$f(x) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$$

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 1$$

Dans la plupart des cas, cela
revient au même de n'exprimer
que les coefficients, c'est ce
qu'on fait avec un polynôme
formel :

$$P = (a_n ; a_{n-1} ; ... ; a_1 ; a_0)$$

$$P = (3 ; -5 ; 1)$$

Polynômes

Évaluer un polynôme, c'est calculer le résultat de la fonction polynomiale selon le paramètre que l'on souhaite :

$$f(2) = 3 \times 2^2 - 5 \times 2 + 1 = 12 - 10 + 1 = 3$$

Le degré d'un polynôme, c'est la valeur de l'exposant le plus élevé :

$$f(x) = -1x^4 - 9x^2 - 4x + 8$$

Degré 4

$$f(x) = 7$$

Degré 0

Polynômes

On peut additionner des polynômes :

$$f(x)=3x^2+1x-5 \qquad g(x)=-7x+4$$

$$f(x)+g(x)=(3x^2+1x-5)+(-7x+4)=3x^2-6x-1$$

On peut soustraire des polynômes :

$$f(x)=3x^2+1x-5 \qquad g(x)=-7x+4$$

$$f(x)-g(x)=(3x^2+1x-5)-(-7x+4)=3x^2+8x-9$$

Polynômes

On peut multiplier des
polynômes :

$$f(x) = 3x^2 + 1x - 5 \qquad g(x) = -7x + 4$$

$$f(x) \times g(x) = (3x^2 + 1x - 5) \times (-7x + 4)$$

$$f(x) \times g(x) = -21x^3 - 7x^2 + 35x + 12x^2 + 4x - 20$$

$$f(x) \times g(x) = -21x^3 + 5x^2 + 39x - 20$$

Polynômes

On peut diviser des
polynômes :

$$f(x)=4x^3-2x+1 \qquad\qquad g(x)=2x-1$$

$$\begin{array}{r|l}
4x^3-2x+1 & 2x-1 \\ \cline{2-2}
2x^2-2x+1 & 2x^2+x-0{,}5 \\
-x+1 & \\
0{,}5 &
\end{array}$$

Identités remarquables

Il arrive qu'on puisse écrire un polynôme comme étant un produit d'autres polynômes plus petits. C'est la factorisation. On s'aide souvent pour ça des identités remarquables :

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$f(x)=4x^2+12x+9=(2x+3)^2$$

$$g(x)=x^6+4x^3+4=(x^3-2)^2$$

$$h(x)=9x^4-16x^2=(3x^2+4x)(3x^2-4x)$$

L'opération inverse est un développement.

Racines

Les valeurs pour lesquelles un polynôme résulte de zéro sont les racines.

Pour un polynôme de degré 1 tel que $ax+b$, il s'agit de : $-\frac{b}{a}$

Pour un polynôme de degré 2 tel que $a\,x^2+b\,x+c$,

il faut calculer $\Delta=b^2-4\,a\,c$

Ensuite :

Si Δ < 0, deux solutions complexes : $x_1=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2\,a}$ et $x_2=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2\,a}$

Si Δ = 0, une solution double : $x=\frac{-b}{2\,a}$

Si Δ > 0, deux solutions réelles : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a}$

Irréductibilité

Un polynôme est irréductible s'il ne peut pas se
décomposer en produits de polynômes non constants

$$4x^2 - 2x + 1 \qquad\qquad -8x^3 - 3x + 3$$

→ Un polynôme de degré 1 est forcément irréductible

$$7x - 5$$

Comment factoriser un polynôme réductible ?
Souvent, on exploite les identités remarquables

Irréductibilité

Comment savoir si un polynôme est irréductible ?

Si le polynôme est de degré 2 ou 3, il est irréductible si et seulement s'il n'a pas de racine

$6x^3 - 8x^2 + 5x - 3$ sur Q : ✗ Racine : 1

$10x^3 - 8x^2 + 5x - 3$ sur Q : ✓

Les autres règles dépendent de l'ensemble sur lequel repose le polynôme

Dans C, les seuls polynômes irréductibles sont ceux de degré 1

Dans R, les seuls polynômes irréductibles sont ceux de degré 1 et ceux de degré 2 sans racine réelle

$10x^3 - 8x^2 + 5x - 3$ sur R : ✗ Racine : 0,69882...

Décomposition en Éléments Simples

Lorsqu'on a une quotient entre deux polynômes, tel que $\dfrac{P}{Q}$,

la décomposition en éléments simples est l'opération qui permet d'exprimer cette même fraction sous la forme d'un polynôme, additionné à une suite de fractions tel que : $\dfrac{J}{H^k}$

Exemples :

$$\frac{x^4}{(x+3)(x^2+x+3)} = x-4+\frac{9}{x+3}+\frac{x+3}{x^2+x+3}$$

$$\frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$$

Cela se révèle très utile pour calculer des primitives ou des transformées de Laplace inverses.

Décomposition en Éléments Simples

1ère étape : calculer la partie entière.
Si le degré du numérateur est d'ores et déjà strictement inférieur à celui du dénominateur, elle est alors nulle. Autrement, il s'agit du quotient de la division euclidienne entre les deux.

Exemples :

$$\frac{4x^6-2x^5+2x^3-x+1}{4x^3-2x-2} \rightarrow x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$$

$$\frac{x^2+3x}{8x^3-5x^2-7x+3} \rightarrow 0$$

Décomposition en Éléments Simples

2ème étape : mettre le dénominateur sous forme irréductible, à savoir, sous forme de produit de polynômes irréductibles

Exemples :

$$x^8-5x^7+11x^6-17x^5+21x^4-19x^3+13x^2-7x+2$$
$$=(x-1)^3(x-2)(x^2+1)^2$$

$$(x^2-3x+7)=(x^2-3x+7)$$

Car c'est déjà un polynôme irréductible

Décomposition en Éléments Simples

3ème étape : déployer la forme de la décomposition

Elle est composée par :

- La partie entière
- Les parties de chaque pôle (racine du dénominateur original), avec des exposants incrémentaux si une racine est d'ordre strictement supérieur à 1

Pour l'instant, on garde des inconnues dans les numérateurs

Exemple :

$$\frac{x+1}{(x-3)^2(x^2+x+2)} = \underbrace{0}_{\text{Partie entière}} + \underbrace{\frac{a}{(x-3)}}_{\text{Pôle}} + \underbrace{\frac{b}{(x-3)^2}}_{\text{Pôle}} + \underbrace{\frac{cx+d}{(x^2+x+2)}}_{\text{Pôle}}$$

Décomposition en Éléments Simples

4ème étape : trouver les numérateurs

1ère méthode : multiplier des deux côtés par le dénominateur du coefficient qu'on veut trouver, simplifier, et évaluer x comme le pôle correspondant

$$\frac{x(x-2)}{x^2-4} = \frac{a(x-2)}{(x-2)} + \frac{b(x-2)}{(x+2)}$$

$$\frac{x}{x+2} = a + \frac{b(x-2)}{(x+2)}$$

Exemple : $$\frac{x}{x^2-4} = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x+2)}$$

$$\frac{1}{2} = a + \left.\frac{b(x-2)}{(x+2)}\right|_{x=2}$$

Pour trouver a, on multiplie des deux côtés par (x-2), on fait les simplifications qui s'imposent, et on évalue x en 2. Pour trouver b, on réapplique la même méthode.

$$\frac{1}{2} = a\Big|_{x=2}$$

Décomposition en Éléments Simples

4ème étape : trouver les numérateurs

2ème méthode : on peut
évaluer x à une valeur simple,
et résoudre

Exemple :

$$\frac{x^5+1}{x(x-1)^2} = x^2+2x+3+\frac{1}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{2}{(x-1)^2}$$

Pour trouver B, on peut
simplement considérer que
x=2, et résoudre l'équation.

$$\rightarrow B=3$$

Décomposition en Éléments Simples

4ème étape : trouver les numérateurs

3ème méthode : on peut évaluer x à l'infini après avoir multiplié une ou plusieurs fois par x

Exemple :

$$\frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)} + \frac{1}{(x+2)}$$

$$\frac{x(x+3)}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{2x}{(x+1)^2} + \frac{bx}{(x+1)} + \frac{x}{(x+2)}$$

$$0 = 0 + b + 1\Big|_{x=+\infty}$$

$$b = -1\Big|_{x=+\infty}$$

Décomposition en Éléments Simples

4ème étape : trouver les numérateurs

4ème méthode : mettre les termes de l'addition sous dénominateur commun, simplifier le numérateur, et procéder par identification

Exemple : $$\frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)}=\frac{a}{(x+1)^2}+\frac{b}{(x+1)}+\frac{c}{(x+2)}$$

$$\frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)}=\frac{a(x+2)+b(x+1)(x+2)+c(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)}$$

$$\frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)}=\frac{(b+c)x^2+(a+3b+2c)x+(2a+2b+c)}{(x+1)^2(x+2)}$$

$$\begin{cases} b+c=0 \\ a+3b+2c=1 \\ 2a+2b+c=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$$

Analyse

Limites

Comment se comporte une fonction d'une variable lorsque celle-ci tend vers l'infini ? Ou lorsque pour une valeur donnée, l'image de la fonction semble aller vers l'infini ? Le calcul de limite permet de formaliser ces interrogations

Intuitivement, $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ signifie qu'en rapprochant assez x de a, alors f(x) finira lui aussi proche de 0

De même, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que pour tout nombre, aussi grand soit-il, on pourra toujours trouver un x assez grand de manière à ce que f(x) le dépasse

Limites

Exemples typiques:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - 43 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 - 43 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 - 43 = -\infty$$

$$\lim_{x \to 8} \frac{x}{2} + 3 = 7$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

Limites

Attention, les limites n'existent pas toujours.

De manière générale, mieux vaut se méfier
des fonctions trigonométriques.

$$\lim_{x \to -\infty} \cos(x) = ✗$$

$$\lim_{x \to 0^-} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ✗$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sin(x) = ✗$$

$$\lim_{x \to 0^+} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = ✗$$

Limites

Lorsqu'on considère les limites de fonctions rationnelles (fractions de polynômes), ne considérer que les termes de plus haut degré pour le comportement vers l'infini

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-5x^3+2x^2-x+7}{3x^2+1} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{-5x^3+2x^2-x+7}{3x^2+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{1}{3}x^2+5x-4}{x^5+1} = 0^+ \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{3}x^2+5x-4}{x^5+1} = 0^-$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2}{x^2+1} = 5 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2}{x^2+1} = 5$$

Limites

On peut réaliser des opérations sur les limites. Cependant on peut facilement tomber sur des formes indéterminées. L'objectif est surtout de savoir quelle est la limite de f(x)+g(x) ou f(x)×g(x)

Addition :

- deux limites infinies positives donnent une limite infinie positive
- Deux limites infinies négatives donnent une limite infinie négative

Multiplication :

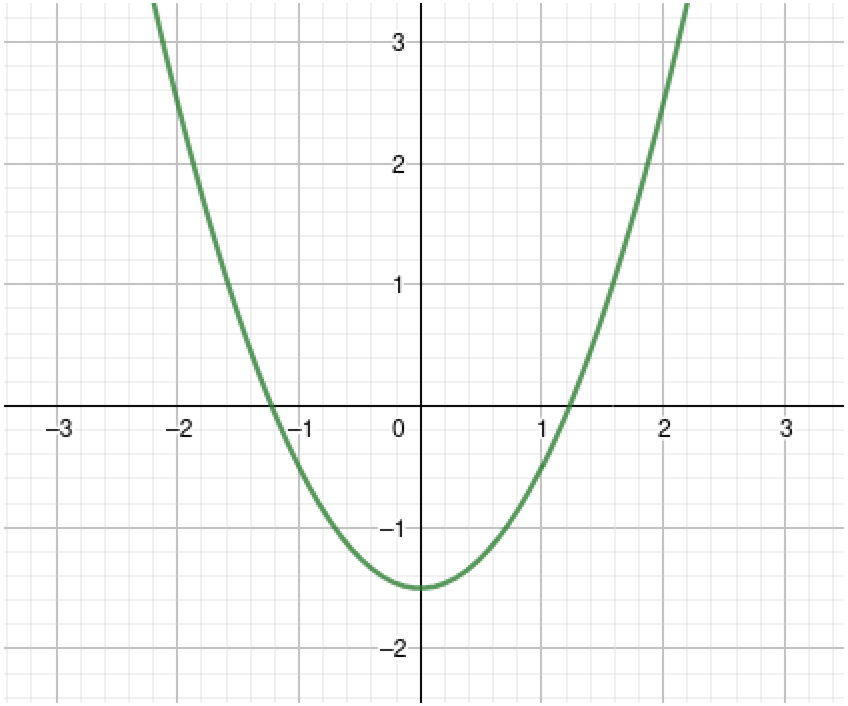
- deux limites infinies positives ou négatives donnent une limite infinie positive
- Deux limites infinies de sens opposés donnent une limite infinie négative

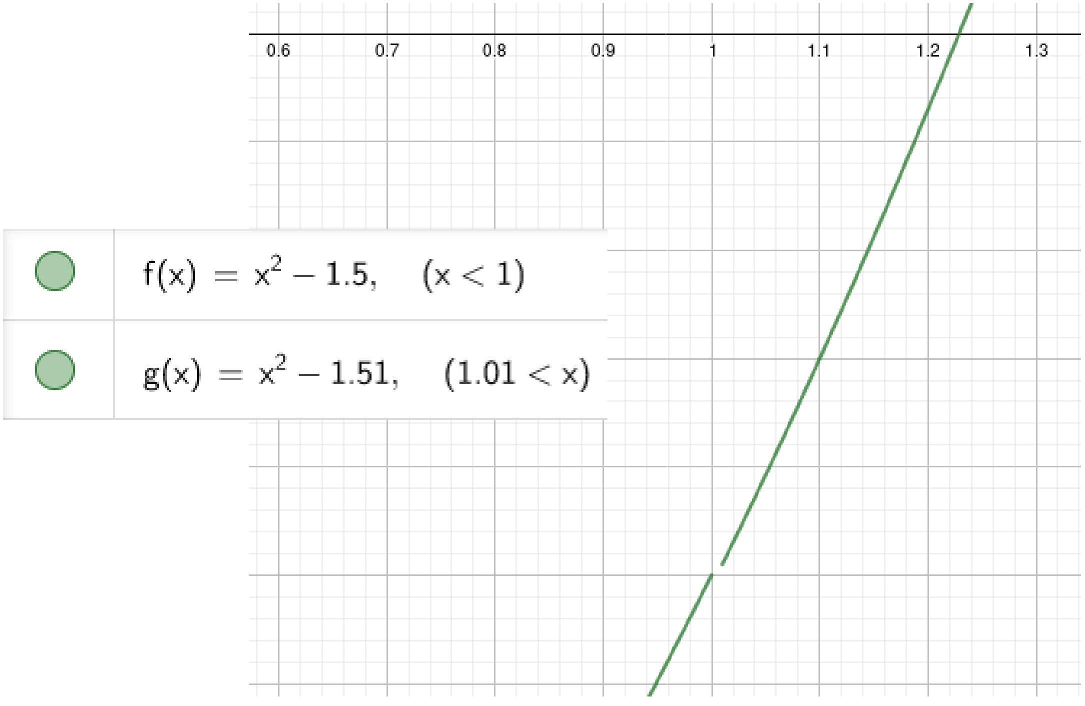
Continuité

Une fonction est dite continue si, à des variations infinitésimales de sa variable, correspondent des variations infinitésimales de son image

Une bonne approche pour considérer la continuité, est de savoir si on peut tracer la courbe d'une fonction sur son ensemble de définition sans lever le crayon

Si un coup d'œil donne un bon aperçu, en théorie, mieux vaut se méfier





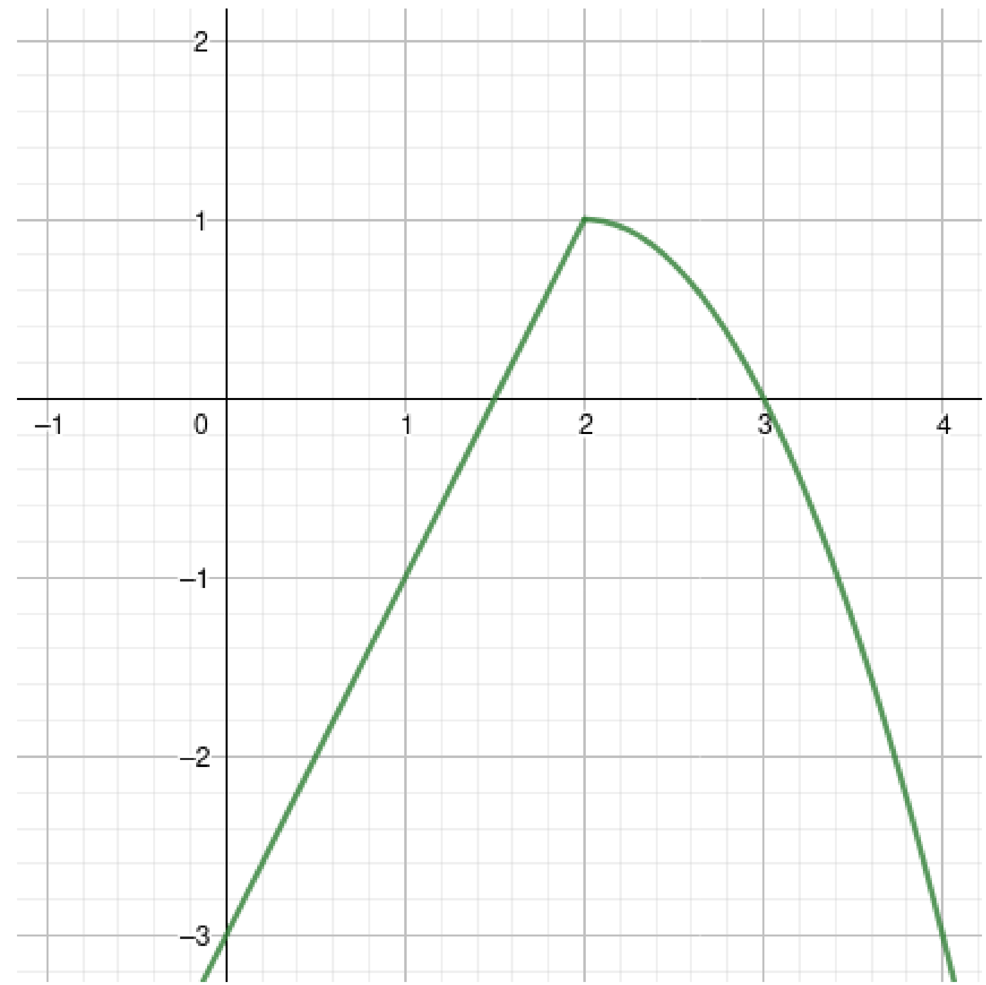
Continuité

Attention, ce n’est pas parce qu’une fonction raccorde plusieurs formules qu’elle est discontinue

Mais il faut que la fonction ait une image pour chaque point autour du raccord, ce dernier compris

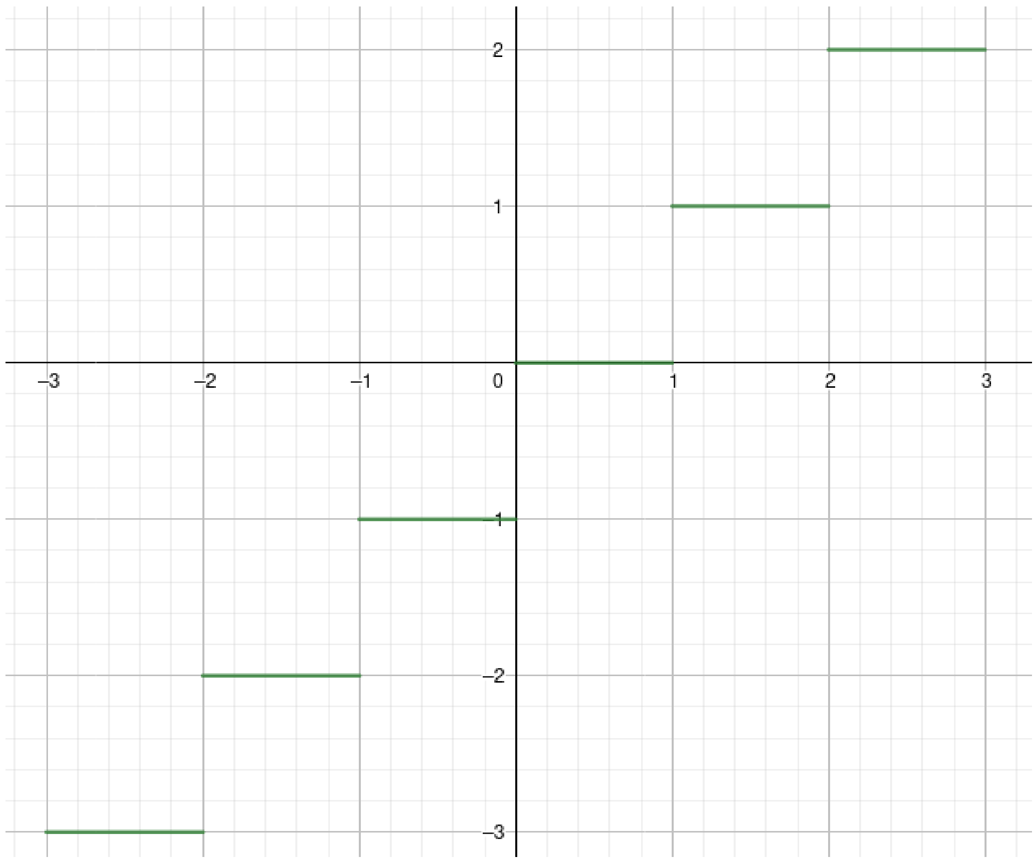
$f(x) = 2x - 3, \quad (x < 2)$

$g(x) = -(x-2)^2 + 1, \quad (2 \leq x)$



Continuité

La vaste majorité des fonctions usuelles sont continues.

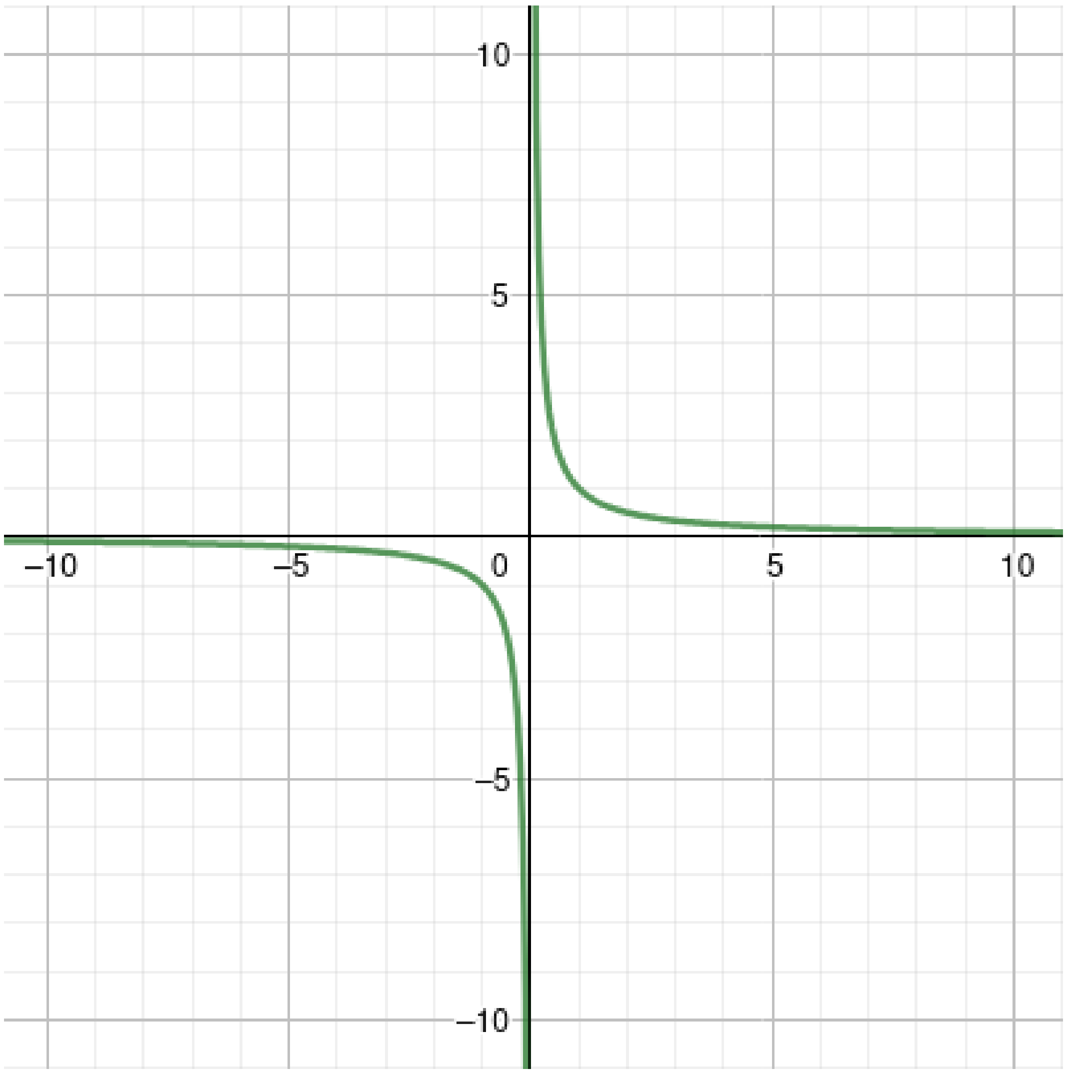


Parmi les fonctions discontinues connues, on peut citer la fonction «partie entière».

Continuité

Attention au cas de

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



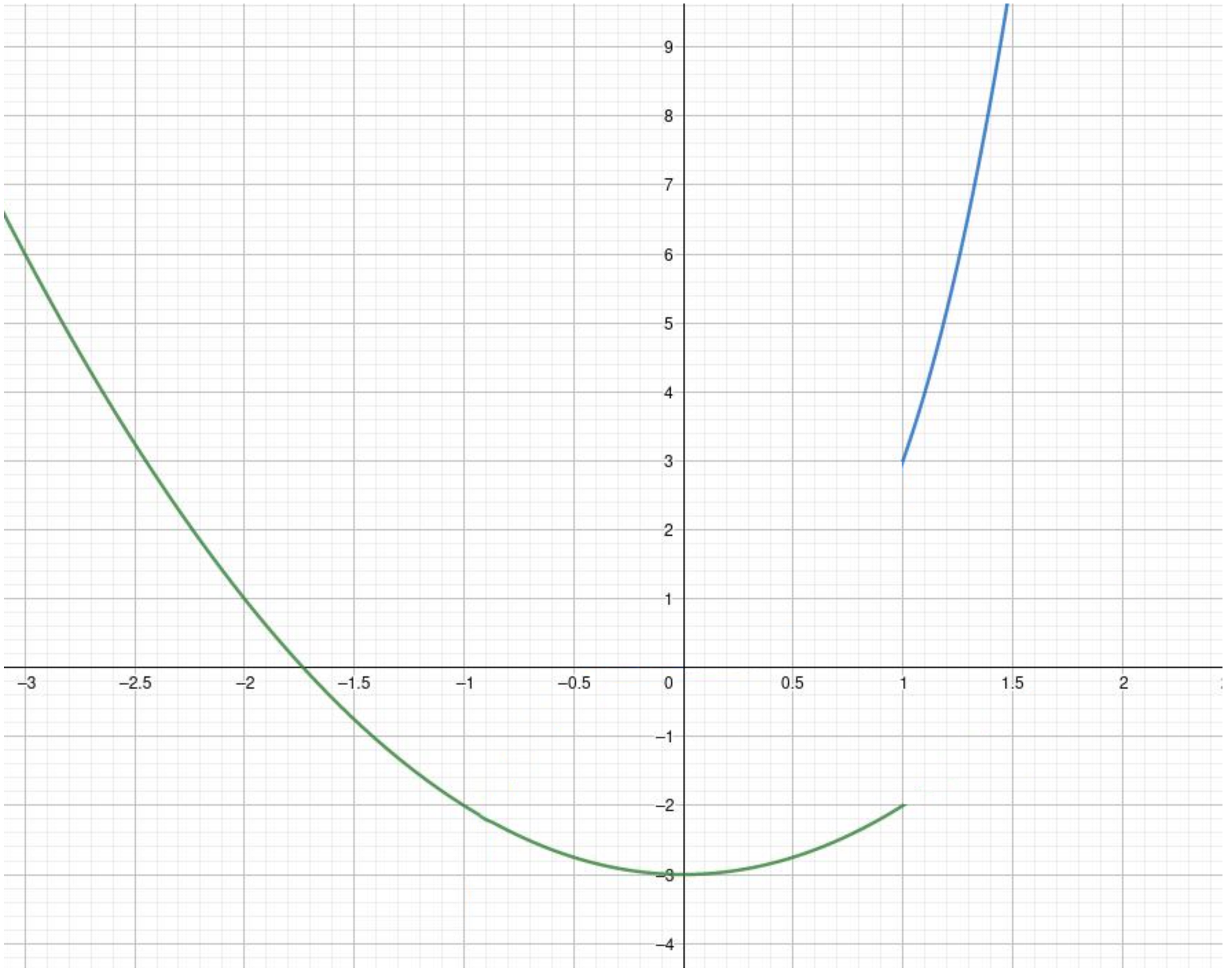
Elle n’est pas définie sur x=0. Quand on lève le crayon pour la dessiner, ce n’est donc pas sur son espace de définition

Limites et discontinuités

Il faut particulièrement prêter attention au côté par lequel tend x dans le cadre des fonctions discontinues

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3 \; si \; x<1 \\ 3x^3 \; si \; x\geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$



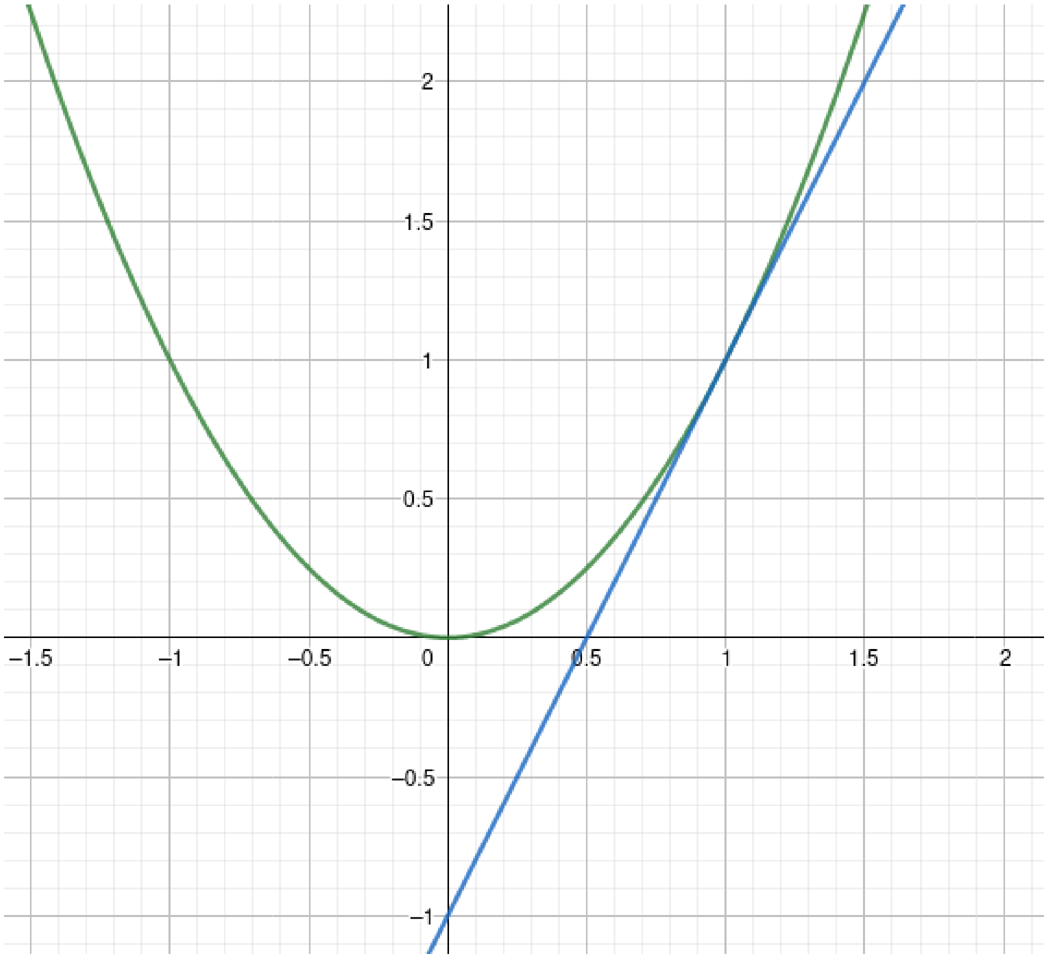
Dérivabilité

La dérivée d'une fonction en un point mesure l'ampleur de changement de la valeur d'une fonction pour une petite variation de la variable

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

C'est une notion fortement liée au concept de tangente

Attention : si une fonction dérivable en *a* est forcément continue en ce point, l'inverse n'est pas sûr : l'exemple le plus cité est la fonction «valeur absolue» en 0



Dérivabilité

Règles opératoires des dérivées :

$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$$

$$(f^n)' = nf^{n-1}\,f'$$ (si n est un entier positif)

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$$ (là où f ne s'annule pas)

d'où $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$$

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

$$(e^f)' = f'\,e^f$$

$$\sin(x)' = \cos(x)$$

$$\cos(x)' = -\sin(x)$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\ln|x|' = \frac{1}{x}$$

Dérivabilité

On en tire les dérivés des fonctions usuelles

$$5' = 0$$

$$(2x^2 - 3x + 5)' = 4x - 3$$

$$(3x)' = 3$$

$$((2x+1)(x^2-3))' = 6x^2 + 2x - 6$$

$$(7x^2)' = 14x$$

$$\left(\frac{-3}{5x+2}\right)' = \frac{15}{(5x+2)^2}$$

$$(4x^3)' = 12x^2$$

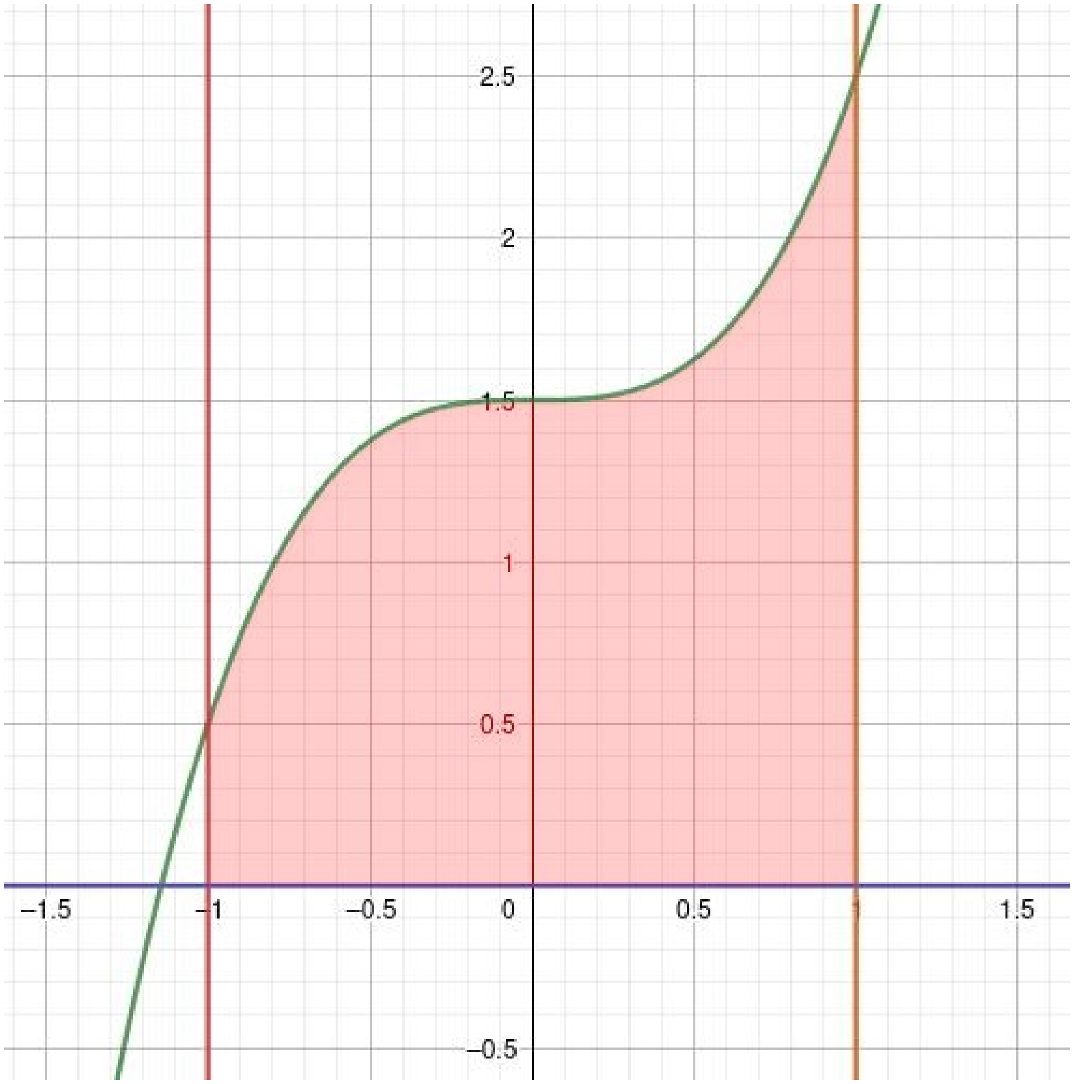
$$\left(\frac{x^2+5x+2}{2x-3}\right)' = \frac{2x^2-6x-19}{(2x-3)^2}$$

Intégrabilité

L'intégrale d'une fonction entre a et b correspond à l'aire entre la courbe de cette fonction, l'axe des abscisses, et les droites verticales sur a et b.

Pour trouver l'intégrale d'une fonction, on calcule sa primitive, qui est une seconde fonction dont la dérivée est égale à première

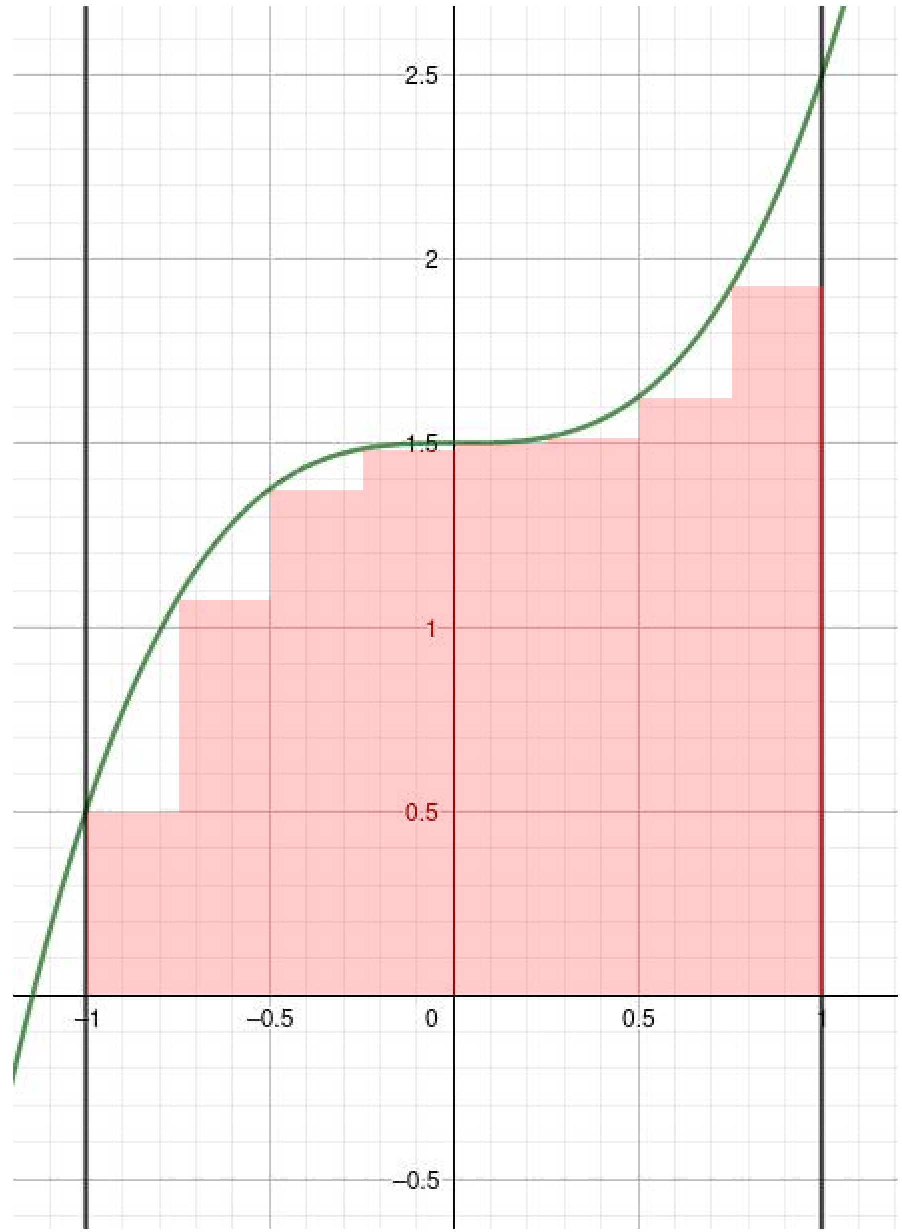
$$f(x) = x^3 + 1,5$$



Intégrabilité

$$f(x) = x^3 + 1{,}5$$

Une autre manière de concevoir l'intégrale d'une fonction, à savoir sous la forme d'une somme de Riemann, est d'imaginer son équivalent sous forme d'escalier



Une fonction escalier évalue une formule en paliers, sur des intervalles de taille constante

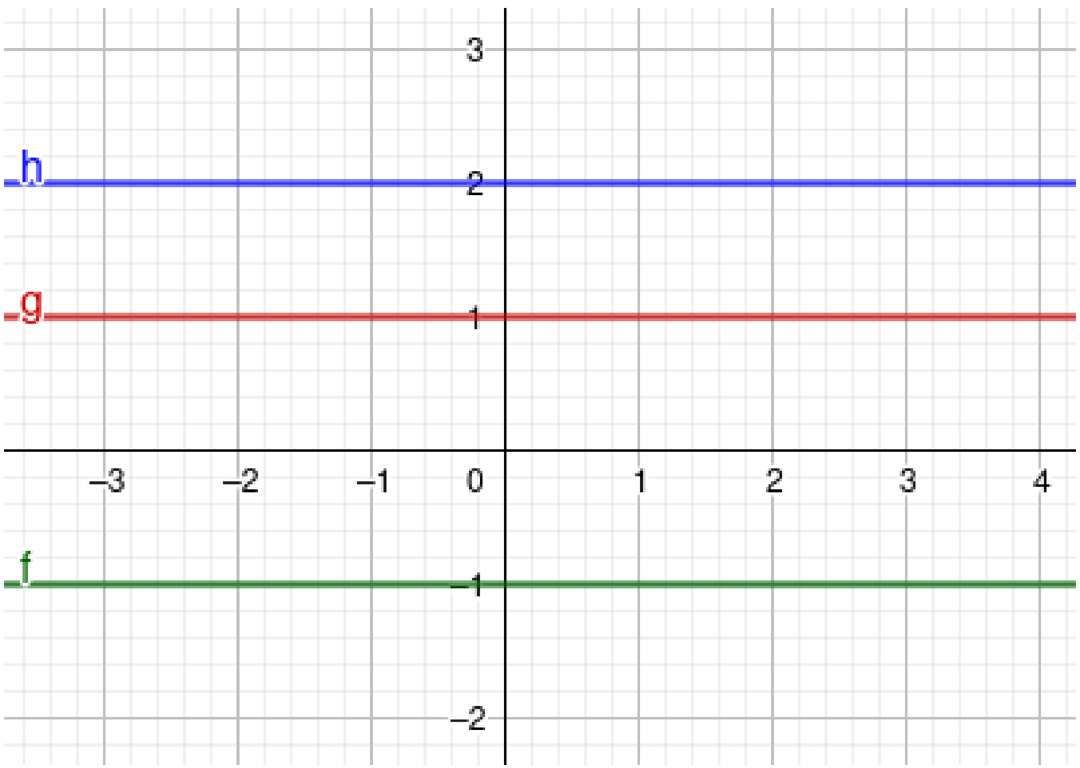
On constate que si la largeur de ces paliers tend vers zéro, on va retrouver l'intégrale exacte

Si l'on considère une suite finie $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\, f(x_i)$$

Intégrabilité

Puisque $0 = (constante)'$, on doit constamment rajouter une constante imprévisible lorsqu'on calcule la primitive d'une fonction

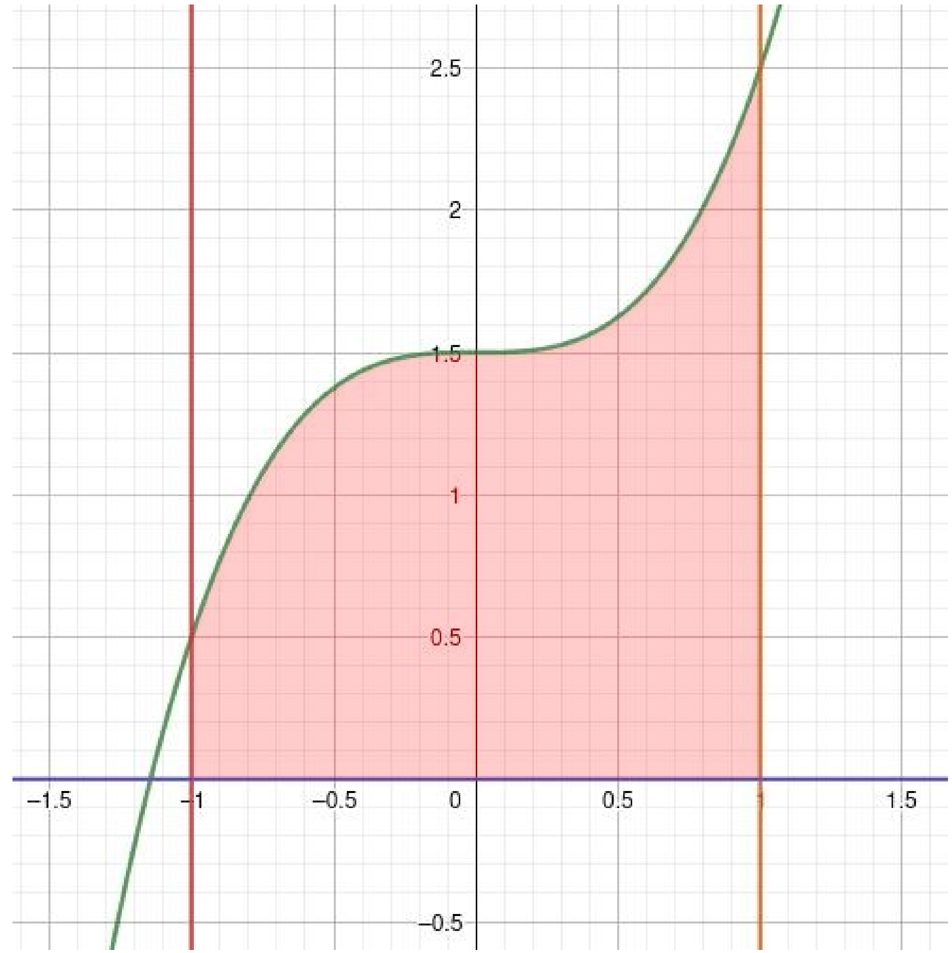


En effet, toutes les fonctions constantes ont la même dérivée : 0

Cette constante n'a cependant aucun effet lors d'un calcul d'intégrale, car elle s'annule tout seule

Intégrabilité

Pour trouver l'intégrale entre deux bornes, on fait la différence entre les évaluations de la primitive à ces deux bornes



$$f(x) = x^3 + 1{,}5 = F'(x)$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + 1{,}5\,x + constante$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + 1{,}5\,x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{4} + 1{,}5\right) - \left(\frac{1}{4} - 1{,}5\right) = 1{,}75 + 1{,}25 = 3$$

Intégrabilité

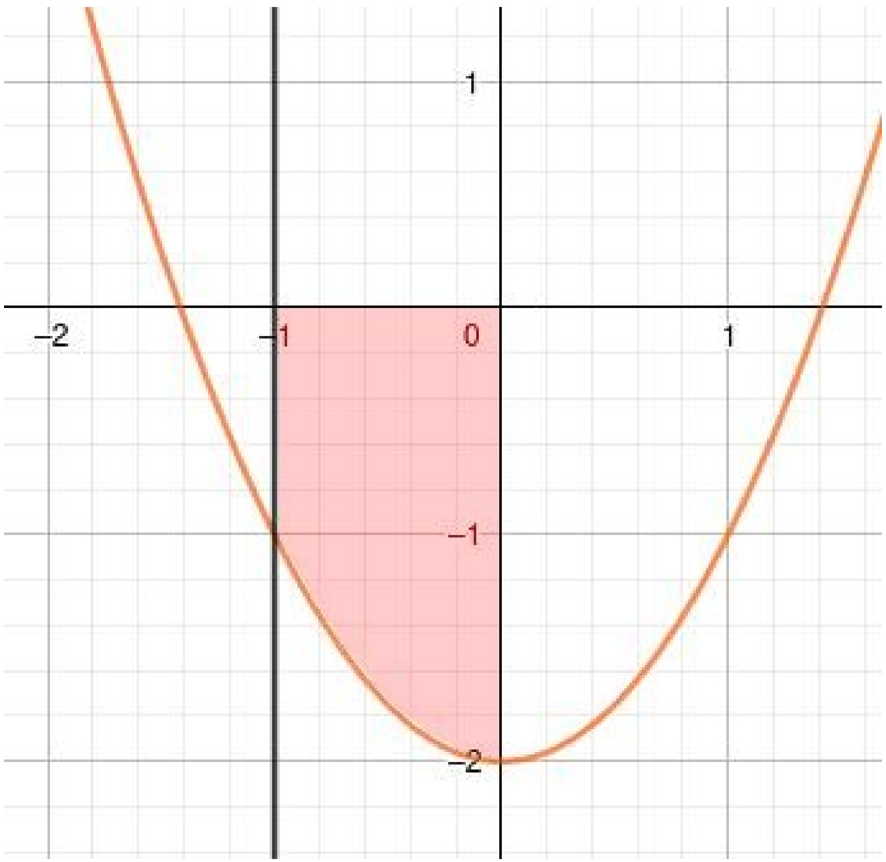
Avec la primitive, on retrouve des aires orientées. Si la notion de sens ne nous intéresse pas, il ne faut retenir que la valeur absolue

$$f(x) = x^2 - 2 = F'(x)$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + constante$$

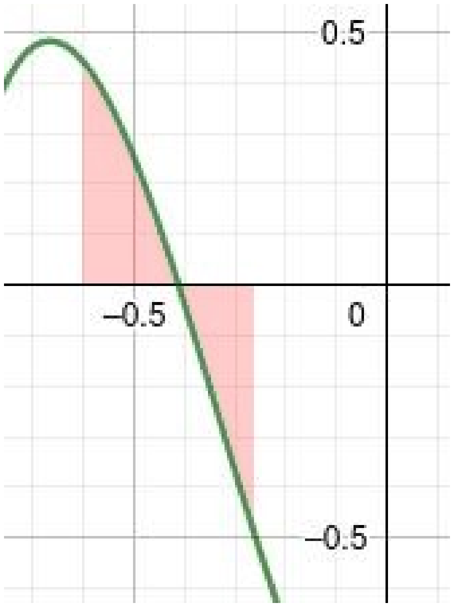
$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = [\frac{x^3}{3} - 2x]_{-1}^{0}$$

$$= (\frac{0}{3} - 0) - (\frac{-1}{3} + 2) = 0 - \frac{5}{3} \approx -1{,}667$$



Intégrabilité

Si une fonction change de signe sur un intervalle, alors si l'on veut calculer l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses, il faut le faire sur plusieurs segments



On utilise alors la relation de Chasles. Si a ≤ b ≤ c, alors :

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Par ailleurs, les intégrales bénéficient de la linéarité :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Intégrabilité

On tire les primitives usuelles en
inversant les dérivées usuelles :

$$0 = (constante)'$$

$$\cos(x) = \sin(x)'$$

$$1 = x'$$

$$\sin(x) = (-\cos(x))'$$

$$x^n = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = (\sqrt{x})'$$

$$\frac{1}{x} = \ln|x|'$$

$$e^x = (e^x)'$$

Intégrabilité

Pour intégrer des fonctions complexes, on peut s'aider des compositions :

$$u' \times u^n = \left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)'$$

$$u' \times \cos(u) = \sin(u)'$$

$$\frac{u'}{u} = \ln|u|'$$

$$u' \times \sin(u) = (-\cos(u))'$$

$$\frac{u'}{u^n} = \left(\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}\right)'$$

pour n ≥ 2

$$\frac{u'}{2\sqrt{u}} = (\sqrt{u})'$$

$$u' e^u = (e^u)'$$

Intégrabilité

La décomposition en éléments simples se révèle utile
lorsqu'il faut intégrer une fraction rationnelle

Sachant que : $$\int \frac{k}{x-a}\,dx = k \times \ln|x-a| + C$$

et : $$\int \frac{k}{(x-a)^n}\,dx = k \times \frac{1}{1-n} \times \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$$ quand n > 1

$$\int \frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)}\,dx = \int \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \frac{-2}{x+1} - \ln|x+1| + \ln|x+2|$$

Classe de régularité

Les fonctions peuvent être classées selon le nombre de dérivées continues qu'elles ont.

$$f(x) = 4x^2 + 3x - 5$$

$$f'(x) = 8x + 3$$

Ainsi, une fonction de classe C^n peut être dérivée n fois, et cette dernière dérivée est continue.

$$f''(x) = 8$$

$$f'''(x) = 0$$

Les fonctions usuelles (polynômes, trigonométriques, exponentielles, logarithmiques…) sont C^∞.

Relations de comparaison : fonctions

Grâce aux relations de comparaison, on peut décrire le rapport entre deux fonctions au voisinage d'un point a :

On dit que f y est négligeable face à g si $\frac{f}{g}$ tend vers 0. On note cette relation $f(x) =_a o(g(x))$

On dit que f y est équivalente à g si $\frac{f}{g}$ tend vers 1. On note cette relation $f(x) \sim_a g(x)$

On dit que f y est dominée par g s'il existe un intervalle ouvert I dont a est une extrémité et que $\forall x \in I$ on a $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M$, M étant un réel strictement positif. On note cette relation $f(x) =_a O(g(x))$

Développements limités

Le développement limité d'une fonction f autour de x_0 donne des informations sur son comportement local.

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \varepsilon(x^n)$$

est $DL_n(x_0)$, à savoir le développement limité de f d'ordre n, avec a_0, a_1, …, a_n des réels.

ε est une fonction qui, tout comme f, est définie sur I, le voisinage de x_0, et qui tend vers 0 quand $x \to x_0$

En pratique, on s'arrangera toujours pour travailler sur des développements limités autour de 0.

Le principale intérêt des développements limités est de calculer des limites et lever des indéterminations.

Inégalité de Taylor-Lagrange

Grâce à la formule de Taylor-Young, on peut approximer le comportement d'une fonction au voisinage d'un point a, avec un polynôme dont les coefficients ne dépendent que des dérivées de cette fonction

Si f est une fonction de classe C^n sur un intervalle I, avec $a \in I$, alors il existe une fonction ε qui tend vers 0 quand $x \to a$, tel que, quand $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \varepsilon(x^n)$$

La formule de Taylor-Young donne donc un développement limité dont les coefficients sont les $\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$, pour k allant de 0 à n.

Inégalité de Taylor-Lagrange

Avec la formule de Taylor-Lagrange, on pousse la même idée, mais pour obtenir des renseignements sur tout un intervalle.

Si f est une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle [a,b], alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

On en déduit directement l'inégalité de Taylor-Lagrange : en supposant qu'il existe M tel que quand $\forall(x) \in I$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, alors on a

$$\left| f(x_2) - f(x_1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_2 - x_1)^k}{k!} f^{(k)}(x_1) \right| \leq M \frac{|x_2 - x_1|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cette inégalité est utile pour estimer des erreurs, et elle reste vraie pour les fonctions à valeurs complexes ou dans un espace vectoriel normé (alors que ce n'est pas le cas pour l'égalité)

Inégalité de Taylor-Lagrange

Pour l'appliquer afin de majorer une erreur, on remplace x_2 par x, et on ignore le M :

$$\left| f(x) - f(x_1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_1)^k}{k!} f^{(k)}(x_1) \right| \leq \frac{|x-x_1|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exemple : on considère $f(x) = -x^3 + 2x$ sur [1;2].

Pour n = 2 : $\left| -x^3 + 2x - \left(1 - (x-1) - 3(x-1)^2\right) \right| \leq \frac{(x-1)^3}{6}$

$$\left| -x^3 + 2x - \left(-3x^2 + 5x - 1\right) \right| \leq \frac{(x-1)^3}{6}$$

En approximant f(x) par $3x^2+5x-1$, on commettra une erreur qui ne dépassera pas 1/6.
C'est de l'ordre de $1{,}7.10^{-1}$.

Pour n = 4 : $\left| -x^3 + 2x - \left(1 - (x-1) - 3(x-1)^2 - (x-1)^3 + 0\right) \right| \leq \frac{(x-1)^5}{120}$

$$\left| -x^3 + 2x - \left(-x^3 + 2x\right) \right| \leq \frac{(x-1)^5}{120}$$

En poussant l'approximation jusqu'aux dérivées nulles, on retrouve la même fonction.
L'erreur maximale devient logiquement bien plus petite : 1/120. C'est de l'ordre de $8{,}3.10^{-3}$.

Analyse asymptotique : cas pratiques

Pour trouver la tangente de f(x) en x_0, on calcule son développement limité à l'ordre 1, pour trouver la tangente sous cette forme :

$$y = a_0 + a_1 x$$

Pour déterminer la position de la fonction par rapport à la tangente, on augmente l'ordre au-delà de 1, et on prête attention au premier terme non nul à partir du deuxième, inclus :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_m x^m + o(x^m) \quad \text{avec } m \neq 0$$

- m est pair : la courbe est toujours au-dessus de la tangente si $a_m > 0$, en-dessous autrement.
- m est impair : la courbe traverse la tangente en ce point.

Analyse asymptotique : cas pratiques

De même, pour trouver l'asymptote d'une fonction au voisinage de +∞, il nous faut mettre celle-ci sous la forme d'un développement tel que

$$f\left(x_0+h\right)=ax+b+\varepsilon\left(h\right)$$

La fonction $y=ax+b$ alors obtenue épouse ainsi l'asymptote de la courbe vers l'infini.

Par exemple, la fonction $f\left(x\right)=\dfrac{3}{2x}+0{,}5\,x+4$

est d'ores et déjà dans la forme requise, puisque $\dfrac{3}{2x}$ tend vers zéro au voisinage de l'infini.

On a ainsi $f\left(x\right)=0{,}5\,x+4+\varepsilon\left(h\right)$, l'asymptote est alors $y=0{,}5\,x+4$

Suites

Suites

Une suite est une famille d'éléments indexée par des entiers naturels.
Si les index s'arrêtent à un nombre précis, alors la suite est dite finie.

Parmi les exemples réputés :

La suite de Fibonacci :

$$u_0 = 0\,;\, u_1 = 1\,;$$
$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

La suite de Syracuse :

$$u_0 = N\,;$$
$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

Les suites commencent souvent, mais pas tout le temps, par 0.
Attention à la notation : (u_n) renvoie à la suite en elle-même, alors que u_n n'est qu'un terme (utilisé par exemple pour calculer u_{n+1})

Suites

On peut utiliser deux notations différentes.

- L'explicite, qui définit u_n en fonction de n.
- La récurrente, qui définit u_{n+1}

Deux catégories de suites sont particulièrement utilisées :

Les suites arithmétiques : $u_n = u_0 + nr$ $\quad$ $u_{n+1} = u_n + r$

Les suites géométriques : $u_n = u_0 \times q^n$ $\quad$ $u_{n+1} = u_n \times q$

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on doit montrer que $u_{n+1} - u_n$ est une constante.

Pour montrer qu'une suite est géométrique, on doit montrer que u_{n+1} est u_n multiplié par une constante.

Suites

Une suite monotone est une suite croissante ou décroissante.

Une suite strictement monotone est une suite strictement croissante ou strictement décroissante.

Pour déterminer si une suite est croissante ou décroissante (ou autrement dit, pour déterminer la monotonie d'une suite), on calcule $u_{n+1} - u_n$.

Lorsque M est un réel :

- Une suite est majorée si pour tout n, $u_n \leq M$.
- Une suite est minorée si pour tout n, $u_n \geq M$.
- Une suite est bornée si elle est majorée et minorée.

Si une suite est croissante et majorée, ou décroissante et minorée, alors elle est convergente.

On dit qu'une suite est convergente si, pour tout $\varepsilon \in R^*_+$, il existe un entier naturel N tel que pour tout n > N :

$$|u_n - l| \leq \varepsilon$$

Dans ce cas on peut dire que la suite u_n tend vers l.
Mais si elle n'a pas de telle limite ou si elle tend vers l'infini, alors on dit qu'elle est divergente.

Suites

Extraire une suite à partir d'une autre, c'est ne retenir que certains de ces termes, selon une fonction arbitraire.

Par exemple, si v_n ne conserve que les termes pairs de u_n, alors v_n est extraite d'u_n tel que $v_n = u_{2*n}$.

Une suite extraite garde la même limite que sa suite parente.

Une suite peut-être complexe, c'est-à-dire associer pour chaque index une valeur dans C.
Par exemple : $u_{n+1} = u_n + 3 -2i$; avec $u_0 = 1 + i$

Théorème des gendarmes ou de l'encadrement :

Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = L$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

Propriété de la borne supérieure

Pour un ensemble A :
Si l'ensemble de ses majorants admet un plus petit élément, alors celui-ci est la borne supérieure de A : sup(A).
Si l'ensemble de ses minorants admet un plus grand élément, alors celui-ci est la borne inférieure de A : inf(A).

Un ensemble ordonné possède la propriété de la borne supérieure si n'importe lequel de ses sous-ensembles non vides et majorés possède une borne supérieure.

Inversement, un ensemble possède la propriété de la borne inférieure si n'importe lequel de ses sous-ensembles non vides et minorés possède une borne inférieure.

Si R possède bien la propriété de la borne supérieure, ce n'est pas le cas de Q par exemple ;

on peut le prouver en sélectionnant la partie $\left\{ x \in \mathbb{Q} \middle| x^2 \leq 2 \right\}$ et en considérant le fait

que $\sqrt{2}$ n'est pas dans Q.

Relations de comparaison : suites

Les relations de comparaison déjà décrites pour les fonctions marchent également avec les suites.

On dit que u_n est négligeable face à v_n si $\dfrac{u_n}{v_n}$ tend vers 0. On note cette relation $u_n = o(v_n)$

On dit que u_n est équivalente à v_n si $\dfrac{u_n}{v_n}$ tend vers 1. On note cette relation $u_n \sim v_n$

On dit que u_n est dominée par v_n s'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0$ on a $\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leq M$, M étant un réel strictement positif. On note cette relation $u_n = O(v_n)$

Séries

Séries

Les séries se basent sur la notion de suite pour étendre les sommes finies.

Une série correspond à la somme des termes d'une suite :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Une série est convergente si, lorsque n tend vers l'infini, elle tend vers une limite finie.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

Cette limite est la somme de la série.
Si elle n'existe pas ou est infinie, alors la série est dite divergente.

Tout comme une suite, une série peut-être complexe, c'est-à-dire associer à chaque terme une valeur dans C.

Par exemple : $\sum_{n} 2n - 3in$

Séries

Une série à termes positifs ou nuls est une série ou chaque terme, pour quelque soit n, est supérieur à zéro.

Une série à termes positifs ou nuls est ainsi monotone croissante.

En fait, une série peut être assimilée à l'intégration d'une fonction au sens de Riemann.

Ainsi, la série $\sum_{n} f(n)$ et l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ seront

de même nature.

Séries

Une série converge absolument si elle converge lorsque l'on considère l'absolu de son terme général : $\sum_n |a_n|$

Si toute série qui converge absolument est convergente, mais l'inverse n'est pas forcément vrai.

Exemple :

La série $\frac{(-1)^n}{n}$ converge, mais son absolu $\frac{1}{n}$, non.

On peut alors utiliser la convergence absolue pour prouver la convergence tout court.

Par ailleurs, on dit qu'une suite est sommable si et seulement si la suite $\sum_{k=1}^{n} |u_k|_{n \in N^*}$ converge.

Nombres complexes

Nombres complexes

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme z = x + iy, où x fait office de partie réelle, et y de partie imaginaire.

Si z = x + iy :

- $-z = -x - iy$ est son opposé
- $\bar{z} = x - iy$ est son conjugué

Imaginés pour résoudre les équations qui n'ont pas de solution dans R, les nombres complexes reposent sur i, défini par $i^2 = -1$

On peut les noter sous trois formes différentes :

- La forme algébrique : $x + iy$
- La forme polaire :
  - Forme trigonométrique : $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$
  - Forme exponentielle : $r e^{i\theta}$

Où r est le module du complexe, et θ l'argument.

Nombres complexes

Le passage de la forme trigonométrique

$$r\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)$$

à la forme exponentielle

$$r\,e^{i\theta}$$

s'explique facilement à l'aide des formules d'Euler :

$$\cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

Nombres complexes

Pour passer de la forme algébrique à une forme polaire, on calcule le module et l'argument :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$ pour le module

pour l'argument, il résout ce système :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

Pour passer d'une forme polaire à la forme algébrique, on fait l'inverse :

$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

Nombres complexes

En forme algébrique, on additionne et soustrait les parties réelles d'un côté, et les parties imaginaires de l'autre.

Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

Si les nombres sont sous forme polaire, mieux vaut les passer sous forme algébrique pour faire des additions ou des soustractions.

Nombres complexes

En forme polaire, pour multiplier deux nombres complexes, on multiplie les modules entre eux, et on additionne les arguments entre eux.

Si $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$ et $z_2 = r(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$

$$z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Il existe aussi un moyen de multiplier en forme algébrique, mais il est souvent préférable de le faire sous forme polaire :

Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$

$$z_1 \times z_2 = (a_1 \times a_2 - b_1 \times b_2) + i(a_1 \times b_2 + b_1 \times a_2)$$

Nombres complexes

En forme polaire, pour diviser deux nombres complexes, on divise les modules entre eux, et on soustrait les arguments entre eux.

Si $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$ et $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

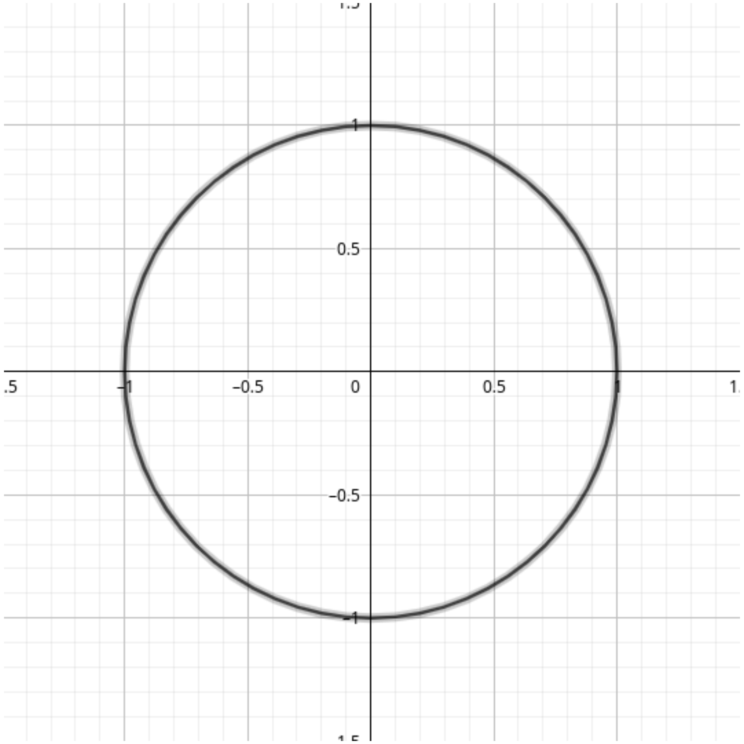
Il existe aussi un moyen de diviser en forme algébrique, mais il est souvent préférable de le faire sous forme polaire :

Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a_1 \times a_2 + b_1 \times b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) + i\left(\frac{a_2 \times b_1 - a_1 \times b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)$$

Nombres complexes

On définit U l'ensemble des nombres complexes de module 1. Ils forment un cercle sur le plan complexe.



Les racines n-ième du nombre complexe Z sont les z tels que $z^n = Z$.

Par exemple, les racines carrées (c'est-à-dire les racines secondes) de l'unité sont 1 et -1. Les racines quatrièmes de l'unité sont 1, -1, i et -i.

On définit $U_n = \left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right), 0 \leq k \leq n-1 \right\}$ comme étant l'ensemble des racines n-ième de l'unité.

On peut en déduire l'ensemble des racines n-ièmes d'un nombre $z = r\,e^{i\theta}$:

$$\left\{ u\, r^{1/n} \exp\left(\frac{i\theta}{n}\right), u \in U_n \right\}$$

Nombres complexes

On peut tout à fait avoir des équations dans C.

Exemple dans le premier degré :

$$8z-16+4i=0 \Rightarrow 8z=16-4i \Rightarrow z=2-\frac{1}{2}i$$

Exemple dans le second degré :

$$z^2+2z+3=0$$

$$\Delta=2^2-4\times1\times3$$
$$\Delta=-8=i^2\times8=\left(2i\sqrt{2}\right)^2$$

$$z_1=\frac{-2+2i\sqrt{2}}{2}=-1+i\sqrt{2} \qquad z_2=\frac{-2-2i\sqrt{2}}{2}=-1-i\sqrt{2}$$

Équations différentielles

Équations différentielles

Si, sur un intervalle I, on a trois fonctions a, b et y tel que :

$$y'(x)+a(x)y(x)=b(x)$$

alors il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
On déclare à côté l'équation homogène associée :

$$y'(x)+a(x)y(x)=0$$

Pour résoudre l'équation différentielle, il faut trouver une solution à la première formule, appelée solution particulière, y_P, et trouver une solution à la seconde formule, appelée solution homogène, y_H.

La résolution de l'équation différentielle générale, y, passe par la forme

$$y_P+y_H$$

Équations différentielles

En ordre un, l'équation homogène est résolue par :

$$y_H(x) = \lambda e^{-A(x)}$$

où A(x) est une primitive de a(x), et λ une constante.

Déterminer λ n'est possible que si l'on a une condition initiale, telle que $y(x_0) = y_0$. Dans ce cas, on applique alors :

$$\lambda = y_0 e^{A(x_0)}$$

Équations différentielles

Pour la solution particulière, on peut utiliser la méthode de variation de la constante, où on prend la solution homogène, on transforme λ en une fonction :

$$y_P(x) = \lambda(x)\, e^{-A(x)}$$

Puis on l'insère dans l'équation, qu'on résout pour déterminer λ(x).

Enfin on additionne les deux solutions :

$$y = y_P + y_H$$

Équations différentielles

Si, sur un intervalle I, on a deux fonctions y et f, et deux réels a et b tel que :

$$y''(x)+ay'(x)+by(x)=f(x)$$

alors il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
On déclare à côté l'équation homogène associée :

$$y''(x)+ay'(x)+by(x)=0$$

Pour résoudre l'équation différentielle, il faut trouver une solution à la première formule, appelée solution particulière, y_P, et trouver une solution à la seconde formule, appelée solution homogène, y_H.

La résolution de l'équation différentielle générale, y, passe par la forme

$$y_P+y_H$$

Probabilités

Probabilités

Une expérience est dite aléatoire si elle ne donne pas les mêmes résultats à chaque fois qu'elle est réalisée.

En probabilité, l'univers est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience. Il peut être fini ou non.

L'union des événements A et B représente l'événement *A ou B* : $A \cup B$

L'intersection des événements A et B représente l'événement *A et B* : $A \cap B$

L'inverse de l'événement A est le complémentaire de A dans son univers : $\bar{A}$

Probabilités

Deux événements A et B sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Si P(B) > 0, la probabilité conditionnelle de A sachant B est :

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Si P(A) et P(B) sont non nulles, la formule de Bayes permet d'exprimer la A sachant B en fonction de B sachant A :

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Probabilités

L'espérance d'une expérience aléatoire est, sur le long terme, le résultat moyen que l'on obtiendra en la répétant.

On la calcule avec une moyenne pondérée par les probabilités :

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(x_i)$$

La variance décrit l'éloignement potentiel des résultats par rapport à l'espérance, ou la dispersion de la variable aléatoire.

On la calcule en pondérant par les probabilités les distances avec l'espérance :

$$V[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E[X])^2 \times P(x_i)$$

Pour annuler l'effet du carré, qu'on a choisit arbitrairement pour obtenir l'effet de la valeur absolue, on définit l'écart-type, qui est le carré de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V[X]}$$

Probabilités

Certaines variables aléatoires ont un comportement qui suit une règle, qu'on décrit alors avec une loi de probabilité.

Loi uniforme : $$P(X=k)=\frac{1}{n}$$

$$\mathrm{E}[X]=\frac{n+1}{2}$$

$$V[X]=\frac{n^2-1}{12}$$

Loi de Bernoulli : $$P(X=1)=p$$

$$\mathrm{E}[X]=p$$

$$V[X]=p(1-p)$$

Loi binomiale : $$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\mathrm{E}[X]=np$$

$$V[X]=np(1-p)$$

Probabilités

Loi géométrique : $$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$$

$$\mathrm{E}[X]=\frac{1}{p}$$

$$V[X]=\frac{1-p}{p^2}$$

Loi hypergéométrique :

$$P(X=k)=\frac{\binom{pN}{k}\binom{(1-p)N}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\mathrm{E}[X]=np$$

$$V[X]=np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

Loi de Poisson : $$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$\mathrm{E}[X]=\lambda$$

$$V[X]=\lambda$$